Eliminare il tempo: Newton, Lagrange e il problema inverso del moto resistente

Marco Panza

ELIMINARE IL TEMPO: NEWTON, LAGRANGE E IL PROBLEMA INVERSO DEL MOTO RESISTENTE(*)

Marco Panza

(*) Per ulteriori considerazioni e notizie sul trattamento newtoniano del moto resistente, cfr. il precedente saggio di M. Galuzzi, a cui sono grato per numerosi consigli e per lunghe e proficue discussioni sull'argomento. Buona parte della mia comprensione del problema che fa oggetto del presente lavoro dipende sicuramente da esse. La mia trattazione della dimostrazione di Newton del 1687 assume la conoscenza del testo di questi che il lettore può trovare, oltre che nell'edizione originaria dei *Principia*, anche in Whiteside (1967 – 81), vol. III, pp. 373–90.

1.

> Dans tout ce qu'on a dit jusqu'ici, du mouvement et des phénomenes qui suivent de sa composition, on n'a fait aucune attention à la résistence du milieu dans lequel il se fait. Il étoit nécessaire de commencer à écarter de la question, cette circostance qui en augmente beaucoup la difficulté, sauf à y revenir dans la suite aprés avoir connu parfaitement ce qui se passeroit si elle n'avait point lieu. C'est par une semblamble gradation que l'esprit humain doit se conduire pour s'élever à la connaissance des phénomenes de la nature. Il lui faut en quelque sorte décomposer son objet, le considérer d'abord sous l'aspect le plus simple, se familiarisez, pour ainsi dire, avec les premieres difficultés, avant que d'entreprendre d'en surmonter le plus grandes. C'est au moyen de cette marche sage et prudente que les Mathématiques, s'élevant de recherches en recherches, ont attein ce point de sublimité auquel elles sont aujourd'hui parvenues.

È con questo estratto di principi illuministici che Jean Montucla apre, nel secondo tomo della sua *Histoire des Mathématiques*, il corto capitolo che egli dedica al problema del moto resistente(1).
Le prime ricerche che egli cita intorno a questo soggetto sono: il secondo libro dei *Principia* di Newton, una nota di Wallis, apparsa nel 1687 sulle *Philosophical Transactions*, uno *schediasma* di Leibniz, pubblicato sugli *Acta Euditorum* del 1689 e l'ultima parte del *Discours de la cause de la Pesanteur*, aggiunto da Huygens al proprio trattato sulla teoria della luce(2).

La prima difficoltà di questa ricerca fu di determinare i caratteri meccanici della resistenza del mezzo. Nel suo *schediasma*, Leibniz distingue la resistenza "*assoluta*" da quella "*relativa*". La prima, originata dalla connessione delle parti del mezzo dipende dalla "*vischisità*" di questo e resta invariabile per rapporto alla velocità; la seconda, dovuta all'inerzia di tali parti, oltre ad essere proporzionale alla "*densità*" è, invece, variabile relativamente alla velocità. Così, se si assume il tempo come variabile indipendente, il problema della resistenza assoluta può considerarsi (in un mezzo omogeneo) come un semplice caso particolare del problema generale della resistenza relativa. Ma qual è la relazione effettiva che, in questo caso, si instaura fra velocità e resistenza?

In tutte le ricerche citate una tale questione appare come totalmente

---

(1) Cfr. Montucla (1758), t. II, pp. 431–44. Il capitolo appare del tutto immodificato anche nella seconda edizione dell'opera: cfr. Montucla (1799 – 1802), t. II, pp. 455–65.

(2) fr. rispettivamente, Newton (1687), pp. 236–400; Wallis (1687) [ma cfr. anche (1693), pp. 438–45]; Leibniz (1689) e Huygens (1690), pp. 168–76.

esterna, non risolvibile che tramite l'interrogazione sperimentale della natura: la teoria *matematica* del moto resistente non si occupa che di indagare le conseguenze delle diverse ipotesi che sembra ragionevole avanzare[3].

Se la resistenza è presa come proporzionale alla velocità, il problema risulta piuttosto semplice e può considerarsi completamente risolto sia da Newton che Huygens. Esso può distinguersi in tre principali sottoproblemi:

i) considerato un moto rettilineo uniforme, trovare le relazioni fra gli spazi e i tempi che si stabiliscono qualora venga opposto ad esso una resistenza;
ii) considerata la caduta libera di un grave accelerato da una gravità costante, trovare queste stesse relazioni, sotto la medesima ipotesi;
iii) considerato un corpo lanciato in un mezzo, su cui agisca una gravità costante, trovare la curva traiettoria e la velocità puntuale determinate dalla resistenza.

La relativa semplicità del terzo problema, che costituisce l'obiettivo finale della ricerca, dipende essenzialmente dal fatto che il movimento cercato può intendersi come la semplice composizione geometrica dei due movimenti considerati nei problemi precedenti[4].

Questo procedimento risulta inapplicabile nel caso in cui la resistenza sia assunta come proporzionale al quadrato della velocità: i segmenti che, in questo modo, devono venir sottratti ai *segmenti* che esprimono le componenti della velocità, non essendo più entrambi proporzionali a tali segmenti, danno luogo a diagonali la cui direzione dipende dal tempo considerato e la cui lunghezza non è proporzionale a questo[5]. Il terzo problema appare, così, sotto questa seconda ipotesi, tanto ostico che, nel 1690, Huygens dubitava della sua stessa risolubilità[6].

---

(3) Una tale separazione di principio fra indagine sperimentale e indagine matematica è, mi pare, un punto di notevole interesse. Se essa caratterizzerà la natura stessa della settecentesca "*meccanica analitica*" è infatti rilevante che essa possa ritrovarsi, come richiesta *a priori*, ben prima che si fosse giunti alla formulazione dei principi generali della meccanica. Ciò dovrebbe far riflettere chi ha sostenuto l'origine sperimentale della scienza moderna.

(4) fr. Newton (1687), lib. II, prop. IV [pp. 241–45] e Huygens (1690), pp. 171–2.

(5) Cfr. Huygens (1690), p. 175. Nel suo (1689) Leibniz credette, tuttavia, di poter comporre, anche in questo caso, come in quello precedente, i movimenti rettilinei ritardati. Egli si accorse dell'errore solo in seguito alla lettura del *Discours* di Huygens [cfr., a questo proposito, Huygens (Euvr.), t. XXI, p. 498].

(6) "[...] il est extremement difficile, si non du tout impossible, de resoudre ce Probleme". [cfr. Huygens (1690), p. 175].

Quando Huygens avanzava i suoi dubbi, i *Principia* erano già stati pubblicati da qualche anno e in essi Newton aveva affrontato il problema, dedicandovi la proposizione X del secondo libro che, stranamente, Huygens non cita fra i contributi newtoniani alla teoria del moto resistente. Se, in senso stretto, ciò può giustificarsi con il fatto che l'enunciato della proposizione formula il problema in modo inverso, in un senso più lato sembra difficile capire questo silenzio nei confronti di un risultato che non era certo sfuggito ai lettori più attenti[7]. Il punto è che, per quanto la genialità della deduzione non venne mai messa in dubbio (anche dopo che Jean e Nicolas Bernoulli[8] mostrarono l'erroneità di una conseguenza della proposizione), essa dovette apparire ai più come la ratificazione di una sconfitta piuttosto che come il suggello di un successo: anche il genio di Newton aveva dovuto capitolare, lasciando in un canto il problema diretto per dedicarsi a quello inverso. Questa interpretazione costituì per lungo tempo la lente attraverso la quale gli storici ricostruirono la vicenda. Una nuova citazione di Montucla mi pare, a questo proposito, significativa.

> Il nous faudroit maintenant parler de la courbe de projection dans un milieu qui résiste en raison des quarrés des vîtesses. Mais cette question, qui n'est que médiocrement difficile dans l'hypothese précédente, l'est bien d'avantage dans celle–ci, et dans toutes les autres. Il suffiroit, pour le prouver, de remarquer qu'elle échappa à M. Newton. Au lieu de la résoudre dans la seconde section du second Livre de ses Principes, où l'on s'áttend à la trouver, il examine quelle loi de densité variable, permettroit à un corps projetté avec une certaine force, de décrire une courbe déterminée, et il tente par -là de déduire inidirectement la solution approchante du problême[9].

E ancora Lacroix, più di cinquant'anni più tardi:

> Quand on fait attention au soin que Newton avait mis dans la composition de son immortel ouverage *des Principes*, pour le porter ainsi en avant qu'il était possible de l'état de la science au moment où il l'écrivait [...], on doit être étonné de la manière incomplete dont il y traite le mouvement des projectiles dans les milieux résistant comme le quarré de la vîtesse [...]. Il n'ose attaquer la question directe; et pour la première fois, appellant à son secours l'analyse algébrique, il quitte la synthèse, qu'il regardait cependant comme la seule voie

---

(7) Esso fu, d'altra parte, sottolineato come uno dei principali risultati dell'opera già nella recensione apparsa sul numero 186 delle *Philosophical Transactions* (primo trimestre 1687) [cfr., in particolare, pp. 294–5].

(8) Cfr. J. Bernoulli (1711) e N. Bernoulli (1711).

(9) Cfr. Montucla (1758), t. II p. 441 e (1799 – 1802), t. II, p. 463.

pour laquelle il fût convenable de présenter une proposition nouvelle. [...] Il est bien évident néanmoins que le problème n'est pas le plus difficile de ceux qui ont été proposés et resolus à la naissance du Calcul différentiel; mais pour le traiter avec succès, il fallait le ramener à une équation différentielle, car la méthode des séries n'y apporte pas la facilité qu'elle donne pour beacoup d'autres, et c'est par cette raison que Newton n'est vint pas au bout.

[...] son défaut de succès à cet égard et l'exposition de ses tentatives prouvent, ce me semble, que c'était uniquement par le développement en séries qu'il était arrivé aux nouveaux calculus, à peu prés comme il l'indique lui même dans la proposition X du livre II de ses *Principes*, et que cette voie ne lui donnait point un accès ainsi facile à l'emploi des équations différentielles, que la considération immédiate des accroissement en eux–mêmes, à laquelle s'était attaché Leibniz(10).

In questi e in altri simili giudizi, l'errore compiuto da Newton nella dimostrazione della proposizione X contenuta nella prima edizione dei *Principia* è, come si vede, del tutto estraneo alla valutazione del suo risultato come il segnale di un insuccesso. Piuttosto, il rilievo di esso da parte di J. Bernoulli e la sua infondata esplicazione da parte di Nicolas(11), produssero nei commentatori settecenteschi un effetto di altra natura (che è all'origine, mi pare, della seconda parte del giudizio di Lacroix): da una parte portandoli a credere che l'errore newtoniano non corrispondesse a altro che a

(10) Cfr. Lacroix (1810–19), vol. 1, pp. XIII – XIV.

(11) Cfr., sull'intera vicenda, Whiteside (1967 – 81), vol. VIII, pp. 312 –3, n. 1. Riporto qui, per comodità del lettore, un estratto della nota di N. Bernoulli, che servirà a giustificare il mio giudizio [cfr. N. Bernoulli (1711), p. 54)].
J'ay jugé qu'il y avoit necessairement quelque meprise, dans le raisonnement de M. Newton; parce que je n'en trouvois aucun dans son calcul. J'ay donc esté curiex de chercher cette méprise; et en examinant avec soin sa solution generale, j'en ay trouvé l'origine: cette méprise est dans le *Corol. III* [...] A cela près, j'ay trouvé cette solution de M. Newton fort exacte.
C'est cette methode de changer les quantités indeterminées et variables en suites convergentes, de prendre les termes de cette suite pour leurs differentielles respectives, sçavoir le second terme pour leur differentielle du premer degré, le troisiéme terme pour leur differentio–différentielle, le quatrième terme pour leur differentielle du troisiéme degré, & c. C'est, dis–je, cette méthode, qui conduit M. Newton à des solutions fausses [...]: car cette maniere de prendre les differentielles, laquelle est prescrite aussi par cet Autheur dans le *Scholium* qui est à la fin de son traité *De Quadraturis*, n'est bonne que pour les differentelles du premier degré; pour ce qui est des autres differentielles d'un degré plus élevé, elles ne sont pas exprimées par les termes de ces suites convergentes, lesquels sont seulement proportionels et non pas égaux à ces differentielles.

una distrazione(12), dall'altra facendo crescere in loro la convinzione che la dimostrazione di Newton utilizzasse in modo esplicito lo sviluppo di Taylor e fosse, quindi, essenzialmente analitica.

Questa seconda convinzione discende da una doppia falsa lettura: della dimostrazione stessa e dell'osservazione di N. Bernoulli, che, pure, rende chiaro che il metodo delle serie è applicato solo in un corollario, nel quale esso serve a tradurre un risultato geometrico già perfettamente compiuto.

Fu solo nel 1797 che l'approfondito interesse che Lagrange dedicò alla questione nella prima edizione della *Théorie*(13) mostrò ai matematici che lo stesso risultato geometrico newtoniano era sbagliato.(14). Tuttavia, egli non fu abbastanza chiaro nel distinguere fra l'originale dimostrazione di Newton e la propria ricostruzione di essa in termini di serie intere. Al contrario egli scrisse, proprio all'inizio del suo libro(15), che "Newton n'avait d'abord employé que la simple considération des séries pour résoudre le problème" e che l'errore proviene dal fatto che egli "n'a pas tenu compte de tous les termes auxquelles il fallait avoir égard". In realtà lo scopo di Lagrange era di contraddire N. Bernoulli, difendendo il metodo delle serie dall'accusa infamante di aver condotto all'errore. Ma per chi non avesse avuto in chiaro il testo originario, le sue parole potevano essere intese concludendo da esse che il risultato erroneo discendeva da un uso inavvertito di questo metodo. Di qui poteva essere facile concludere che la nuova dimostrazione, contenuta nella seconda edizione dei *Principia* (in cui il ricorso allo sviluppo in serie intere permette di tradurre alcuni risultati geometrici in forma analitica già nel corso della prova della proposizione, senza attendere i corollari), altro non fosse che l'esito di un uso corretto del procedimento. Ciò è chiaramente falso, ma è probabilmente da una lettura simile che hanno origine giudizi come quello di Lacroix o, ancora più esplicitamente, di Hegel:

L'errore in cui cade Newton risolvendo un problema col trascurare essenziali potenze superiori, errore che fornì ai suoi avversari l'occasione di un trionfo del loro metodo sopra il suo, e di cui Lagrange ha nel suo recente studio [...] indicata la vera origine, mostra il *forma-*

(12) Cfr. ancora Montucla (1758), t. II, p. 441 e (1799 – 1802), t. II, p. 463, ma anche d'Alembert (Diff.), p. 988a e (For.), p. 118a.

(13) Cfr. Lagrange (1797), pp. 244–51.

(14) Pochi mesi dopo la pubblicazione della *Théorie*, J. Trembley lesse all'Accademia di Berlino una memoria nella quale, riferendosi a una dimostrazione di Borda del 1769 [cfr. Borda (1769)], censurò il giudizio di Lagrange, riaffermando la correttezza dell'osservazione di N. Bernoulli [cfr. Trembley (1798)]. Non conosco nessuna traccia di una eventuale interesse di Lagrange a una così poco autorevole (e fondata) smentita.

(15) Cfr. Lagrange (1797), pp. 5–6 [cfr. anche (1813), pp. 5–6].

lismo e la *poca sicurezza* che vi era tuttora nell'uso di cotesto strumento. Lagrange fa vedere che Newton cadde in quell'errore perché trascurò quel termine della serie che conteneva la potenza dalla quale, in quel determinato problema, tutto dipendeva. | Newton si era attenuto a quel principio formale e superficiale, di tralasciare i termini a cagione della loro relativa piccolezza.| [...] L'errore della soluzione newtoniana derivò non già dal non aver tenuto conto di alcuni termini della serie presi solo come *parti di una somma*, ma dal non aver tenuto conto di *quel termine che contiene quella determinazione qualitativa* dalla quale tutto dipende[16].

Le modifiche che Lagrange portò al proprio testo, in occasione della seconda edizione,[17], se tesero, forse, a un chiarimento in questo senso, non furono tanto esplicite da far correttamente concludere al lettore che il procedimento di Newton (almeno nella prima dimostrazione) fosse un procedimento espressamente geometrico.

Vale così, forse, la pena, alla luce di una reinterpretazione della prima dimostrazione di Newton, di provare a rileggere l'analisi di Lagrange.

2.

Un esame più attento delle osservazioni di Lagrange conduce, a me pare, a concludere che egli colga, pur nelle profonde differenze, i legami intrinseci che, al di là del metodo utilizzato e del linguaggio in cui essa è esposta, connettono la prima dimostrazione di Newton con la sua stessa soluzione del problema, condotta nei termini della teoria generale delle funzioni analitiche. Così, se l'obiettivo di Lagrange era quello di mostrare l'origine dell'errore di Newton, egli fa, in realtà, molto di più, mettendo, piuttosto, in luce la ricchezza della sua dimostrazione e fornendo, implicitamente, una chiave di lettura per reinterpretare una parte della storia della meccanica.

Sarei tentato di dire di più: la soluzione di Lagrange mi pare, infatti, realizzare un ritorno all'impostazione *intrinseca* della dimostrazione newtoniana del 1687. Ma, per procedere per gradi, esporrò innanzitutto la soluzione lagrangiana[18]. È chiaro che, nel 1797, scopo di questa non era risolvere un difficile problema di meccanica (che, come tale, non aveva trovato alcun posto nella stessa *Méchanique analitique*[19]), ma, piuttosto quello di

[16] Cfr. Hegel (1832), 26128 – 2633. Lo stesso brano si ritrova con alcune lievi differenze, e senza la proposizione fra tratti, anche in (1812), 17313–31.

[17] Cfr. Lagrange (1813), pp. 334–49.

[18] Cfr. Lagrange (1797), pp. 241–44. Cfr. anche, con leggere e inessenziali modifiche, (1813), pp. 334–38.

[19] Cfr. Lagrange (1788). Dal punto di vista della *Méchanique analitique* la

mostrare all'opera, su di un esempio meccanico storicamente significativo, la propria teoria delle funzioni derivate[20].

Considerando la resistenza come una forza ritardatrice, agente sul corpo lungo la direzione della tangente alla curva traiettoria (riferita a un sistema ortogonale x, y, z comunemente orientato (nel quale le coordinate sono, separatamente prese, delle funzioni indeterminate del tempo) e indicando con α, β, γ gli angoli che tale tangente forma con gli assi, con r_t il rapporto fra la forza assoluta di resistenza (considerata nell'istante t) e la massa del corpo e con g la forza assoluta di gravità agente negativamente lungo la direzione dell'asse y, le equazioni del moto in questione saranno, relativamente a un generico punto $T(x_t, y_t, z_t)$:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} i)\ & x_t'' = -r_t \cos\alpha = -\frac{r_t x_t'}{v_t} \\ ii)\ & y_t'' = -r_t \cos\beta - g = -\frac{r_t y_t'}{v_t} - g \\ iii)\ & z_t'' = -r_t \cos\gamma = -\frac{r_t z_t'}{v_t} \end{aligned}$$

dove v_t è il modulo della velocità nell'istante t (ovvero nel punto T).[21].

Confrontando (1)(i) e (1)(iii) e passando alle primitive si avrà:

$$\text{(2)} \qquad z_t' = C_1 x_t'; \quad z_t = C_1 x_t + C_2 .$$

Considerando l'asse x come appartenente al piano verticale individuato da questa equazione, possiamo porre $C_1 = C_2 = 0$ e eliminare (1)(iii)[22].

soluzione del problema è, infatti, al più, un semplice esercizio applicativo. Lagrange si limita, nella seconda edizione [cf. Lagrange (1811–15)] a fornire le equazioni generali del moto resistente [cfr. l'annesso [1]], senza presentarne un'integrazione esplicita.

[20] In un altro studio di prossima pubblicazione ho cercato di mostrare come la trattazione degli esempi meccanici, condotta nella *Théorie*, sulla base della teoria delle funzioni derivate, non alteri il significato profondo delle corrispondi dimostrazioni contenute nella *Méchanique analitique* e in alcune memorie precedenti, fornendo, piuttosto, per esse, un nuovo linguaggio, in cui le derivate riferite al tempo si sostituiscono alle variazioni.

[21] Ovvero in termini analitici:

$$v_t = \sqrt{[x_t']^2 + [y_t']^2 + [z_t']^2}\,.$$

[22] Lagrange dimostra che la combinazione delle forze considerate non può che dar luogo a una traiettoria contenuta in un piano (ciò che Newton aveva dato per scontato).

La soluzione del problema si riduce, così, a eliminare t dalle equazioni (1)(i) e (ii), esprimendo le derivate relative al tempo, in termini di derivate di y relativamente a x e a determinare, poi, banalmente, il rapporto r_t/g, confrontando le trasformate.

Lagrange ottiene questo risultato tramite due procedure alternative, che sfruttano entrambe le identità generali:

$$(3)\quad \begin{aligned} &i) && y'_t = [y'_x][x'_t] \\ &ii) && y''_t = [y'_x][x''_t] + [y''_x][x'_t]^2 \\ &iii) && y'''_t = [y'_x][x'''_t] + 3[y''_x][x'_t][x''_t] + [y'''_x][x'_t]^3 \\ & && \&c. \end{aligned}$$

(sulle quali si veda l'annesso [2]).

Calcolando (da (3)(i) e (ii)) il valore di y''_x espresso in funzione delle derivate relative al tempo e sostituendo in esso i valori (1)(i) e (ii) di x''_t e di y''_t si trae:

$$(4)\qquad y''_x = -\frac{g}{[x'_t]^2}$$

L'assenza di r_t da tale equazione mostra che il valore di r_i/g dipende da derivate di ordine superiore. Derivando la (1)(i) e (ii) otteniamo, allora, i valori di x'''_t e di y'''_t e da essi, sfruttando ancora le identità (3) e per una procedura simile alla precedente, si trae (tenendo conto della (4)):

$$(5)\qquad y'''_x = -\frac{2r_t g}{[x'_t]^3 v_t} = -\frac{2r_t g}{[x'_t]^3\sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2}} = -\frac{2r_t[y''_x]^2}{g\sqrt{1+[y'_x]^2}}$$

ovvero:

$$(6)\qquad \frac{r_t}{g} = -\frac{y'''_x\sqrt{1+[y'_x]^2}}{2[y''_x]^2}$$

Essendo, d'altra parte, secondo (3)(i), $v_t = \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2} = x'_t\sqrt{1+[y'_x]^2}$, da (4) si trae:

$$(7)\qquad v_t = \frac{\sqrt{g}\sqrt{1+[y'_x]^2}}{\sqrt{-y''_x}}$$

Accettando, inoltre, l'ipotesi di Newton, per cui $r_t = K\Delta_t(v_t)^2$ (dove Δ_t indica la densità nel punto (x_t, y_t)), si avrà:

$$(8)\qquad r_t = -\frac{Kg(1+[y'_x]^2)\Delta_t}{y''_x}$$

e, quindi, sostituendo in (6):

$$(9)\qquad K\Delta_t = \frac{y'''_x}{2y''_x\sqrt{1+[y'_x]^2}}$$

Supposta, ora, l'omogeneità del mezzo, si avrà $\Delta_t = \Delta =$ Cost. e, quindi, ponendo $2K\Delta = W$ e indicando con $s = s(x)$ l'arco indeterminato della curva:

$$(10)\qquad \frac{y'''_x}{y''_x} = W\sqrt{1+[y'_x]^2} = Ws'_x$$

e, quindi, integrando (relativamente a x):

$$(11)\qquad y''_x = He^{Ws}$$

(con H una costante arbitraria), da cui la traiettoria y_x può essere tratta per approssimazione.

Alternativamente: essendo $x = x_t$ e $t' = 1$, possiamo invertire la funzione e porre $t = t_x$ e $x' = 1$. In accordo con la (3) avremo, allora, in generale:

$$(12)\quad \begin{aligned} &i)\ y'_t = \frac{y'_x}{t'_x} \quad \text{e, analogamente,} \\ &x'_t = \frac{x'_x}{t'_x} = \frac{1}{t'_x} \\ &ii)\ y''_t = \frac{y''_x}{[t'_x]^2} - \frac{[t''_x][y'_x]}{[t'_x]^3} \quad \text{e, analogamente,} \\ &x''_t = \frac{x''_x}{[t'_x]^2} - \frac{[t''_x][x'_x]}{[t'_x]^3} = -\frac{t''_x}{[t'_x]^3} \end{aligned}$$

Sostituendo tali valori in (1)(i) e (ii) si trae, allora:

$$(13)\quad \begin{aligned} &i) && \frac{t''_x}{[t'_x]^3} = \frac{r_t}{[t'_x][v_t]} = \frac{r_t}{\sqrt{1+[y'_x]^2}} \\ &ii) && \frac{y''_x}{[t'_x]^2} - \frac{[t''_x][y'_x]}{[t'_x]^3} = -\frac{r_t[y'_x]}{[t'_x][v_t]} - g = -\frac{r_t[y'_x]}{\sqrt{1+[y'_x]^2}} - g \end{aligned}$$

e, confrontando:

$$(14)\qquad \frac{y''_x}{[t'_x]^2} = -g$$

da cui, derivando relativamente a x, dopo aver diviso per y''_x:

$$\frac{t''_x}{[t'_x]^3} = -\frac{gy'''_x}{2[y''_x]^2} \tag{15}$$

che, sostituendo in (13)(i) dà ancora (6)[23]. Non è poi difficile trarre la (7) sostituendo in $v_t = \sqrt{[x'_t]^2 + [y'_t]^2}$ i valori di x'_t e y'_t dati da (12)(i) e sfruttando la (14).

3.

Le differenze fra questa soluzione (che verrà ripetuta in due diverse occasioni da R. de Prony[24]) e quella di Newton sono tanto evidenti e rilevanti da poter essere prese come una esemplificazione *concreta* delle trasformazioni che, in poco più di un secolo, hanno segnato l'evoluzione non soltanto della meccanica, ma, in generale, dell'intera scienza matematica.

Esse sono, tuttavia, a me pare, tutte riconducibili a una diversità essenziale: mentre Newton risolve un problema specifico, scegliendo un linguaggio e una procedura dimostrativa intrinsecamente connessi a questo, Lagrange non fa che applicare principi e metodi generali a un esempio assai semplice che assume il sapore di un facile esercizio. Ciò di cui egli dispone è, infatti, la determinazione generale e a *priori* della relazione che si istituisce, in ogni caso particolare, fra le forze che agiscono su di un corpo e il movimento che esse producono: una relazione che non si giustifica sulla base di alcun esempio specifico, ma trova, piuttosto, la sua origine nella concettualizzazione stessa della forza e della velocità, resa possibile dall'affermarsi del calcolo differenziale. Al problema *meccanico* di determinare una resistenza si sostituisce il problema *analitico* di trasformare un sistema di equazioni differenziali. Così quelle che apparivano alla fine del secolo XVII come questioni essenzialmente diverse fra loro: determinare la resistenza data la traiettoria e la traiettoria data la resistenza, appaiono, alla fine del XVIII, come modi diversi di formulare lo stesso problema.

Dietro una simile trasformazione vi è, senza dubbio, un cambio di orientamento epistemologico che ha le sue origini nella progressiva liberalizzazione della meccanica dal vincolo della rappresentabilità geometrica della soluzione. Questo processo ha due facce che, io credo, vadano entrambe valutate: se esso è il frutto di un modo diverso di concepire gli oggetti d'indagine (e, innanzitutto, le curve) che, lentamente, si afferma durante lo stesso XVII secolo, è solo l'evoluzione delle conoscenze matematiche – anche nei loro aspetti più *tecnici* – che rende operante questa trasformazione e assegna a essa legittimità.

Da questo punto di vista, la agile e, in definitiva, assai semplice soluzione di Lagrange è l'erede diretta di un'evoluzione le cui tappe principali possono indicarsi, ancor prima che nella memoria del 1711 di J. Bernoulli e nella seconda dimostrazione di Newton, nel tentativo di Varignon di edificare una teoria generale del moto resistente, nella quale la determinazione della traiettoria, sotto una qualsiasi ipotesi particolare, potesse discendere dall'applicazione di un unico metodo generale[25] e, solo qualche anno più tardi, nella trattazione di Hermann[26] e, finalmente, nel 1736, nella *Mechanica* di Euler[27].

I limiti di questa comunicazione mi impediscono un'analisi dettagliata di simili contributi. Preferisco, al contrario, tornare all'origine, riconsiderando la soluzione di Newton. Se, infatti, mi è stato abbastanza facile utilizzare giudizi storici ormai sedimentati per inserire nel proprio alveo la rapida carrellata sulle essenziali e significative differenze che essa presenta rispetto a quella di Lagnage, sarà, forse, più difficile giustificare la mia tesi che individua fra le due soluzioni un legame intrinseco in cui io credo si misuri

---

(23) Se volessimo considerare la gravità come una forza variabile, avremmo, integrando (14):

$$-\frac{2t''_x}{[t'_3]^3} = \frac{gy'''_x}{[y''_x]^2} - \frac{g'_x}{y''_x}$$

e, quindi, sostituendo in (13)(i):

$$\frac{r_t}{g_t} = -\frac{y'''_x\sqrt{1+y'_x}}{2[y''_x]^2} + \frac{g'_x\sqrt{1+y'_x}}{2g_t y''_x}$$

[cfr. Lagrange (1813), pp. 339–9].

(24) Cfr. de Prony (1799) [per la datazione, cfr. l'articolo "de Prony" in *Dict. Sc. Biogr.* (R. M. McKeon), vol. XI, pp. 163–6, p. 164], pp. 448–50 e (1810–15), vol. II, pp. 135–38. Mentre nel primo caso l'esposizione segue fedelmente quella di Lagrange, limitandosi a modificarne la notazione (che torna a essere classificamente differenziale), nel secondo, essa presenta qualche significativa differenza, dovuta a una diversa concettualizzazione delle equazioni del moto [cfr. l'annesso [3]].

(25) Cfr. Varignon (1707), seguito da una serie di 11 memorie, comparse fra quelle dell'*Académie des sciences* [de Paris] per gli anni 1708 – 11 [relativamente all'ipotesi di una resistenza proporzionale al quadrato della velocità, cfr., in particolare, (1709); sul metodo di Varignon cfr., invece, l'annesso [4]].

(26) Cfr. Hermann (1736), pp. 345–56 e 395–98 [cfr. l'annesso [5]].

(27) Cfr. Euler (1736), in particolare, t. I, cap. VI, pp. 369–480 [cfr. annesso [6]]. La Mechanica di Euler scatenó, nel 1739, le feroci obiezioni di B. Robins che ne criticó i metodi infinitesimalisti, riconducendone la correttezza dei risultati a una compensazione degli errori [cfr. Robins (1739)]. Le poche pagine di questo *pamphet* sono, a me pare, un interessante documento della ritrosia dei newtoniani settecenteschi ad accettare la potenza dei metodi analitici.

– certo solo in termini esemplificati – la ricchezza del contributo newtoniano all'emergere di una meccanica tanto diversa, nella sua impostazione matematica, dall'originario modello dei *Principia*.

4.

Un primo elemento di contatto può forse apparire estrinseco e, in parte, lo è, ma merita, io credo, di essere notato: alcune delle trasformazioni di Lagrange possono essere utilizzate per trarre dall'ipotesi iniziale dell'argomentazione di Newton il corretto risultato finale.

La prima parte del ragionamento proposto da questi può, a me pare, riformularsi nei termini seguenti. Sia data una curva qualsiasi ACK, percorsa da un mobile lanciato in un mezzo con una velocità variabile e indeterminata. Scelto un punto C su questa curva, si immagini di conoscere la posizione G, assunta dal mobile dopo che sia trascorso un certo tempo dall'istante in cui esso si trovava in C. Tale posizione è, secondo Newton, determinata da tre differenti fattori o, detto in altri termini, il movimento del corpo, nel tempo considerato, dipende da tre forze distinte che, se tale tempo è assunto come *nascente* o, che dir si voglia, infinitamente piccolo, possono essere considerate come costanti in intensità e direzione. Queste forze sono: la forza d'inerzia che, isolatamente presa, condurrebbe (dopo questo tempo) il corpo in un punto H posto sulla tangente alla curva in C; la forza di gravità che lo condurrebbe in P; la forza di resistenza che, componendosi con le forze precedenti, lo conduce in G. Newton assume che le posizioni P, H e G siano tali che il punto G si trovi sulla parallela alla tangente passante per P a una distanza da P inferiore a CH, ovvero che la resistenza agisca lungo la stessa direzione dell'inerzia, ma con verso contrario. La proporzionalità fra gli spazi e il prodotto delle forze e dei quadrati dei tempi (che ha luogo *all'inizio* del movimento[28] e, comunque, per forze costanti) permette, allora, di trarre l'identità:

$$\frac{r}{g} = \frac{FH}{FG} \tag{16}$$

che, in termini moderni, scriveremmo sotto la forma:

$$\frac{r_t}{g} = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0}\left[\frac{FH}{FG}\right]\left[\begin{matrix} FH = \rho = \rho(t,\theta) \\ FG = \gamma = \gamma(\theta)\end{matrix}\right] \tag{17}$$

[28] Il riferimento di Newton è al lemma X del I libro [cfr. Newton (1687), p. 32].

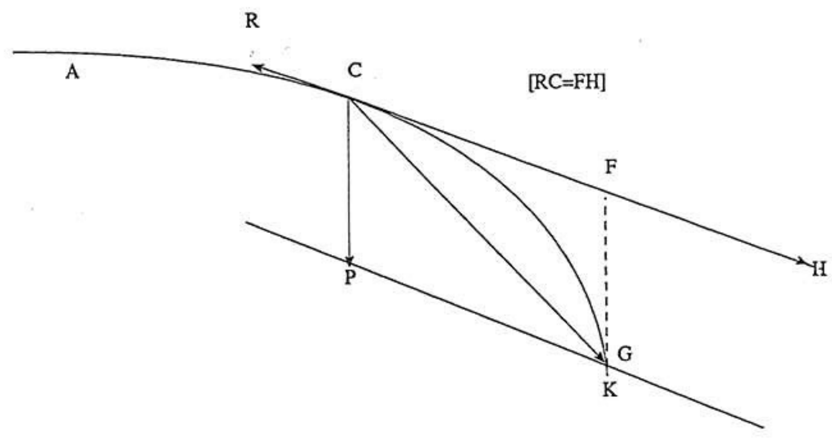

FIGURA 1

Se l'enunciato della proposizione concedesse la conoscenza, oltre che della traiettoria ACK, anche della velocità con cui essa è puntualmente percorsa, chiedendo di trarre da questi dati la resistenza e, quindi, la densità del mezzo, le posizioni H e G potrebbero essere determinate in modo assai semplice e il problema potrebe dirsi risolto. Questo non è, tuttavia, il caso. Il problema è, infatti, significativamente più difficile: data la curva (e assunta come costante la forza di gravità), determinare contemporaneamente densità, resistenza e velocità. Che un tale problema sia risolvibile è geometricamente evidente a partire dalla semplice osservazione che, quale che sia la lunghezza CH – data la curva e in presenza delle proprietà intuitive di regolarità della traiettoria e dell'ovvia condizione che la resistenza non possa essere tale da invertire il verso del movimento – la condizione di codirezionalità del vettore che esprime la resistenza, rispetto a quello che esprime l'inerzia, permette di determinare univocamente la posizione del punto G.

Il prolema si trasforma, così, in un problema derivato: esprimere il rapporto FH/FG (o, se vogliamo considerare tempi qualsiasi, il limite di questo rapporto) in funzione delle sole proprietà della curva ACK. È a questo scopo che mira la seconda parte della dimostrazione di Newton ed è proprio in essa che trova posto il suo errore. È, infatti, facile rendersi conto che dalla (17) segue, attraverso le trasformazioni di Lagrange, il risultato corretto.

Ponendo (fig. 2) $OB = x$, $BC = y_x$ e $x = x_t$ si ha, indipendentemente dalla relazione che lega x al tempo (e che esprime la componente orizzontale della velocità puntuale)[29],

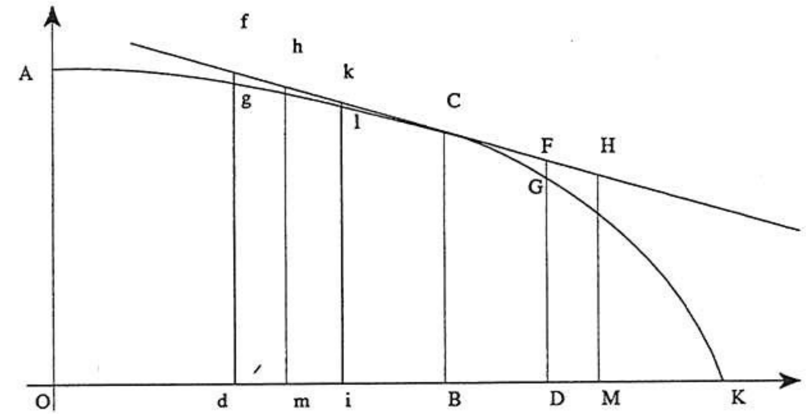

FIGURA 2

$$(18)\qquad FH = \frac{\theta^2}{2}\left[-x_t'' - \frac{x_t'''\theta}{3} - \&c.\right]\sqrt{1+[y_x']^2}$$

e, quindi, sfruttando il classico risultato di Galileo per la caduta dei gravi,

$$(19)\qquad \frac{r_t}{g} = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0} \frac{\left[-x_t'' - \frac{x_t'''\theta}{3} - \&c.\right]\sqrt{1+[y_x']^2}}{g} = \frac{-x_t''\sqrt{1+[y_x']^2}}{g}$$

da cui la (6) segue, sostituendo, per una semplice congiunzione della (12)(ii) e della (15).

5.

La precedente ricostruzione, che separa la dimostrazione di Newton in due fasi distinte, è il punto di partenza del mio argomento. Così come per Lagrange, anche per Newton, il problema iniziale si riduce, infatti, essenzialmente a un problema di eliminazione dei tempi. Mentre il primo, partendo dalle generali equazioni del moto, concepisce tale problema come quello di trasformare delle relazioni fra derivate relativamente a t in relazioni fra fra derivate di y relativamente a x, il secondo, partendo da una specifica

(29) Cfr. l'annesso [7], in particolare la [7](5)(i).

scomposizione del movimento durante un tempo infinitamente piccolo, lo concepisce come un problema di trasformazione geometrica di un rapporto dipendente dal valore della velocità istantanea in un rapporto indipendente da questo.

Se studiamo, infatti, il ruolo che, nel corso della derivazione, hanno i segmenti il cui valore dipende dalla velocità puntuale, ci accorgiamo che esso non è dissimile da quello che le quantità indeterminate hanno in una usuale dimostrazione analitica. Una volta che il rapporto FH/FG è stato ridotto a un rapporto dipendente dal solo incremento BD, che inizialmente è inteso come la componente orizzontale del movimento durante il tempo θ, questo stesso segmento può, grazie all'indeterminatezza del tempo, essere preso come una quantità indeterminata, totalmente indipendente dalla velocità e assumere, quindi, il ruolo di un parametro spaziale.

Dietro le profonde differenze fra i linguaggi utilizzati, il piano delle dimostrazioni di Newton e Lagrange sembra, così, essenzialmente lo stesso.

L'introduzione di un immaginario movimento retrogrado (le cui proprietà saranno del tutto assenti dall'espressione finale del risultato) svolge, allora, il ruolo di un artificio locale atto a giustificare delle identità geometriche che permettono il realizzarsi delle trasformazioni adeguate.

L'analogia diviene ancora più stretta se entriamo nel merito della seconda parte della dimostrazione newtoniana. Essa consiste, a me pare, di tre parti distinte. La prima contiene la giustificazione delle identità geometriche:

$$(20)\qquad \begin{aligned} &i)\quad FH = \frac{fC - CF}{2} \\ &ii)\quad \frac{fC - CF}{CF} = \frac{FG - kl}{FG + kl} = \frac{FG - kl}{2FG} \end{aligned}$$

La seconda consiste nell'uso di queste identità per passare, banalmente, dalla (16) al risultato del corollario 2:

$$(21)\qquad \frac{r}{g} = \frac{CF(FG - kl)}{4(FG)^2}$$

La terza sfrutta le relazioni

$$(22)\qquad \begin{aligned} &i)\quad CF = [v_t\theta - FH] = v_t\theta \\ &ii)\quad FG = \frac{1}{2}g\theta^2 \end{aligned}$$

per trarre, in congiunzione con (16) e (20), la relazione[(30)]

$$\Delta \propto \frac{fC - CF}{(CF)^2} = \frac{FG - kl}{(FG + kl)CF} \tag{23}$$

La determinazione della resistenza è quindi, del tutto indipendente da quella della densità e dall'ipotesi iniziale che suppone la prima proporzionale al quadrato della velocità, la quale interviene solo nella (23). Il corollario 2 non segue, quindi, a ben guardare, né dal risultato conclusivo della proposizione, né dal corollario 1, ma solo da alcune delle identità già sfruttate nel corso della loro dimostrazione. Ora, l'enunciato del problema richiede, letteralmente, di determinare la densità e la velocità. Si potrebbe pensare che il ruolo del corollario 2 consista nel permettere il passaggio dalla (23) al valore della velocità. Tuttavia il risultato che si ottiene componendo (23) e (21), grazie all'ipotesi $r \propto \Delta v^2$ è esattamente lo stesso che si ha componendo la (22) con la (23) e la (20)(ii). Il corollario 2 non contiene, quindi, alcun risultato che sia, in qualche modo, richiesto dalla proposizione. Tuttavia, in congiunzione con le (22) e le trasformazioni proposte nel corollario 3, la (21) dà (se $r \propto \Delta v_t^2$):[(31)]:

$$K\Delta = \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} = \frac{y_x'''}{3y_x''\sqrt{1+y_x'}} \tag{24}$$

(30) Da (22) è ovvio che

$$v_t^2 = \frac{(CF)^2 g}{2FG}$$

ma, $\Delta v_t^2 \propto r$ e, quindi, secondo (16)

$$\Delta \propto \frac{2FG}{(CF)^2}\frac{FH}{FG} \propto \frac{FH}{(CF)^2}$$

da cui la (23) è ovvia, sfruttando le (20).

(31) Dalle (22) segue, infatti,

$$r = K\Delta v_t^2 = K\Delta \frac{(CF)^2}{2FG} g = K\Delta \frac{1+Q^2}{2R} g$$

e, quindi, sostituendo in (21) e impiegando la notazione di Newton:

$$K\Delta = \frac{FG - kl}{2(FG)(CF)} = \frac{2S\omega^3}{2(R\omega^2)\omega\sqrt{1+Q^2}} = \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}$$

che a Newton non poteva non apparire come uno strumento per tentare (in un mezzo omogeneo, resistente come il quadrato della velocità) approssimazioni (almeno locali) della traiettoria a partire dalla resistenza.

Il ruolo del corollario 2 mi pare, così, quello di legare il problema inverso al problema diretto. Se 4 anni dopo la pubblicazione dei *Principia*, Huygens poteva dubitare della risolubilità di quest'ultimo, ciò dipendeva, allora, dalla concezione che questi aveva della soluzione di un problema meccanico. La (24) fornisce, infatti (al di là della sua erroneità dovuta all'indebita presenza di un fattore costante uguale a 2/3), una relazione analitica e non una determinazione geometrica (per quanto approssimata) della traiettoria. Il legame fra i due problemi, che oggi appare evidente, lo era molto meno alla fine del XVII secolo. In primo luogo, infatti, l'interpretazione della (24) come un'equazione flussionale del terz'ordine richiede la conoscenza della forma generale dello sviluppo di Taylor, che Newton stesso inserì nella versione manoscritta di un suo trattato solo nel 1691[(32)], anche se la trattazione degli esempi al corollario 3 mostra chiaramente che egli ne era in possesso fin dagli anni in cui compose i *Principia*. In secondo luogo, l'unico strumento che Newton possedeva, nel 1687, per tentare un'integrazione approssimata di una tale equazione era il metodo d'integrazione per serie che egli aveva formulato (per equazioni del primo ordine) nel *De Methodis*[(33)] e che ha il limite essenziale di non poter fornire che un'approssimazione *locale* della curva. In terzo luogo, infine, l'equiparazione curva – equazione non era certo, allora, così scontata e, anzi, i *Principia* (e lo stesso trattato di Huygens sulla pesantezza) sono proprio costruiti, come è d'altronde ben noto, sull'opposizione fra geometrico e analitico.

Si può forse, allora, avanzare l'ipotesi che il legame che Newton istituisce con il corollario 2 della proposizione X del II libro fra il problema inverso del moto resistente e quello diretto sia una sorta di segnale dei limiti intrinseci dell'approccio geometrico e delle difficoltà a esudirne le richieste, che la sua genialità gli aveva permesso di scorgere. Sotto questa luce, lo stesso giudizio di Lacroix merita, forse, al di là dell'immaginaria assegnazione a Newton di una soluzione analitica del problema inverso, di venir riletto.

Se, infatti, la dimostrazione di Newton è condotta secondo un procedimento rigorosamente sintetico, la forma che egli assegna al risultato finale e il metodo proposto nel corollario 3 manifestano chiaramente la preoccu-

(32) Mi riferisco alla prima versione del *De Quadratura* [cfr. Whiteside (1967 – 81), vol. VII, pp. 48–129, in particolare pp. 96–8]. Nella versione finale del trattato, publicata nel 1704 [cfr. Newton (1704)], Newton ometterà la parte relativa alla formulazione esplicita di tale risultato.

(33) Cfr. Whiteside (1967–81), vol. III, pp. 32–353, in particolare, pp. 94–112.

pazione di fornire una facile traduzione analitica del primo(34). Il carattere specifico della traduzione proposta da Newton è l'ultimo significativo elemento di analogia con la dimostrazione lagrangiana che vorrei, per ora, sottolineare. In luogo di fare esplicito riferimento alla nozione di flussione, questi preferisce, infatti, intendere gli elementi geometrici considerati come i termini successivi di una serie intera. Così, se il risultato è chiaramente ottenuto attraverso una procedura infinitesimalista, esso può intendersi, in quanto tale, come una regola atta a ritrovare, in ogni caso particolare, il rapporto cercato, tramite un procedimento *standard*, dipendente dalle sole leggi dell'algebra(35) (intesa come *aritmetica universale*). Newton presenta, così, un'interpretazione implicita delle flussioni dei diversi ordini che sembra corrispondere a quella che, nel 1797, verrà proposta da Lagrange e che consiste, come è noto, nell'intendere queste come i coefficienti successivi dello sviluppo in serie intera della funzione primitiva, il quale è, a sua volta, ottenuto tramite indipendenti procedimenti algebrici, assegnando alla variabile un incremento indeterminato e arbitrario(36).

6.

Se ci spostiamo, ora, a considerare l'analisi lagrangiana della dimostrazione di Newton o, per meglio dire, la ricostruzione che Lagrange propone di questa(37), troviamo, a me pare, un'implicita sottolineatura dei legami che ho cercato di indicare nei paragrafi precedenti. Scopo dichiarato di tale analisi è, d'altra parte, quello di individuare l'errore di Newton, scoprendone, per così dire, l'origine. Recentemente Whiteside ha riformulato la conclusione a cui essa giunge, indicando tale origine nella trascuranza della componente verticale della forza di resistenza, la quale contribuirebbe (in-

(34) Forse si può trovare qui un esempio significativo della possibilità di invertire (nella interpretazione dei *Principia*) la relazione spesso individuata fra i metodi analitici e quelli sintetici. Se Newton resta, infatti, convinto della necessità di una giustificazione geometrica dei risultati e se l'ipotesi di un'euristica analitica sembra debba categoricamente escludersi, si manifesta qui la preoccupazione di dare ai propri risultati (anche se certamente non alla dimostrazione) una forma geometrica, facilmente traducibile, a *posteriori*, in termini analitici.

(35) Sui metodi algebrici di sviluppo messi a punto da Newton, cfr. il *De Analysi* [Whiteside (1967–81), vol. II, pp. 206–47, in particolare, pp. 212–33] e il *De Methodis* [ivi, vol. III, pp. 32–353, in particolare, pp. 32–70].

(36) Un'osservazione simile potrebbe essere fatta anche a proposito della stessa dimostrazione newtoniana dello sviluppo di Taylor, di cui alla precedente nota (32).

(37) Cfr. le precedenti note (13) e (17).

sieme alla forza di gravità) a generare il segmento FG(38) (che non può, così, essere considerato come proporzionalità quest'ultima). Una tale lettura del ragionamento di Newton, che pur è, senza dubbio, illuminante, deve, a me pare, essere più accuratamente precisata. Nel corso della dimostrazione, i segmenti FG e CF vengono, infatti, intesi da Newton in due modi diversi: come gli spazi coperti, durante il tempo θ, da un mobile cui agiscano isolatamente la gravità e la risultante della composizione dell'inerzia e della resistenza puntuali; e come delle differenze relative alla curva, determinate dalla posizione effettiva G che il mobile assume nell'istante $t+\theta$. Ora, se la considerazione di un tempo infinitamente piccolo (o *nascente*), durante il quale le forze restano costanti in intensità e direzione, permette questa equiparazione, le identità che essa produce non sono che identità al limite (o, se si vuole, al second'ordine) e non permettono, quindi, delle sostituzioni indiscriminate, quale quelle che, Newton, al contrario, ne trae.

Non è difficile capire che tali sostituzioni corrispondono, in ultima analisi, a omettere degli infinitesimi di ordine superiore, equiparando fra loro dei segmenti che non sono uguali che relativamente ai primi ordini. Ciò può condurre, forse, alla tentazione di ricostruire la dimostrazione di Newton, utilizzando direttamente in essa lo strumento analitico degli sviluppi in serie intera per esprimere il valore dei segmenti considerati(39) e interpretandone le inferenze nei termini del principio di omissione. Una simile ricostruzione ha, tuttavia, un difetto che a me pare capitale: alla luce di essa l'errore risulta non solo evidente, ma perfino banale e, quindi, inspiegabile, risolvendosi in equiparazioni troppo affrettate che, nel corso dello stesso ragionamento, si riferiscono, in occasioni diverse, al secondo o al terz'ordine. Se essa può, allora, servire per rendersi conto, a *posteriori*, che la deduzione è fallace, non è, mi pare, del minimo aiuto per comprenderne la dinamica intrinseca.

Ma, lasciando da parte i preliminari, veniamo più dettagliatamente alla ricostruzione proposta da Lagrange, seguendo la quale il cuore dell'argomento di Newton risiede essenzialmente nelle sue premesse implicite che, introducendo una notazione più agile, egli esprime nel modo seguente.

> Le mobile étant parvenu à un point quelconque de la courbe, sans la résistence et la gravité il décrirait, dans un temps donné très – petit, une partie très – petite de la tangente que nous désignerons par α;

(38) Cfr. Whiteside (1967 – 81), vol. VIII, p. 374, nota 6: "Here is born the confusion which blights Newton's succeding argument: The "linelet" FG is generated not merely by the force of vertically downwards gravity, but also through the component (here negative) of the force of resistence to the motion along CFH which acts in the same down – wards direction".

(39) Cfr. l'annesso [7].

soient γ le petit espace que la gravité [lui] ferait décrire dans le même temps perpendiculairement à l'horizon, et ρ le petit espace dont la résistance diminue l'espace α parcouru sur la tangente, il est clair que le rapport de ρ à γ sera celui de la résistence à la gravité. Ainsi le corps, dans le temps qu'il aurait parcouru sur la tangente l'espace $\alpha - \rho$, sera descendu verticalement de la quantité γ; par conséquent γ sera la flèche de l'arc $\alpha - \rho$. Maintenant, si on considère le corps comme partant du même point et rebroussant chemin pour décrire en sens contraire le même arc de la courbe qu'il a parcouru, il faudra regarder la résistance comme négative, et par conséquent comme une force qui accélère le mouvement au lieu de le retarder. Ainsi, le corps décrira, dans la même temps trés - petit, l'espace $\alpha + \rho$ sur la même tangente dans une direction contraire, et descendra en même temps verticalement de l'espace γ, en en vertu de la gravité. Par conséquent γ sera la flèche de l'arc $\alpha+\rho$, pris de l'autre côté du point de la courbe dont il s'agit(40).

Tali assunzioni corrispondono, chiaramente, alle seguenti identità:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &i) && CH = hC = \alpha \\ &ii) && FH = fh = \rho \\ &iii) && fC - CF = 2FH = 2fh = 2\rho \\ &iv) && FG = fg = \gamma \end{aligned}$$

la cui correttezza deriva dalla considerazione di un tempo infinitamente piccolo, durante il quale la direzione della tangente alla curva (ovvero dell'inerzia e della resistenza) possa considerarsi come invariabile. Se indichiamo, ora, con le lettere greche i moduli dei vettori che esprimono le forze, prese come costanti (in intensità e direzione) durante il tempo considerato e con le lettere latine i segmenti della figura 3, riferiti alla curva, le identità (25) esprimono le equiparazioni fra entità geometriche e meccaniche che erano state annunciate(41).

(40) Cfr. Lagrange (1797), pp. 244–45 e (1813), pp. 339–40.

(41) L'identità cruciale $fg = FG$ non deriva, così, da un'omissione illegittima, ma dall'equiparazione fra le saette degli archi di curva e il vettore che esprime l'effetto della gravità che, ovviamente, non cambia passando dal movimento discendente a quello ascendente. Tale equiparazione è, d'altra parte, l'ovvia conseguenza della considerazione della curva come un poligono i cui lati infinitamente piccoli sono descritti con velocità costante (per effetto di forze costanti), durante tempi infinitamente piccoli. La dinamica del ragionamento di Newton risulta più chiara se le identità (25) sono direttamente dedotte,

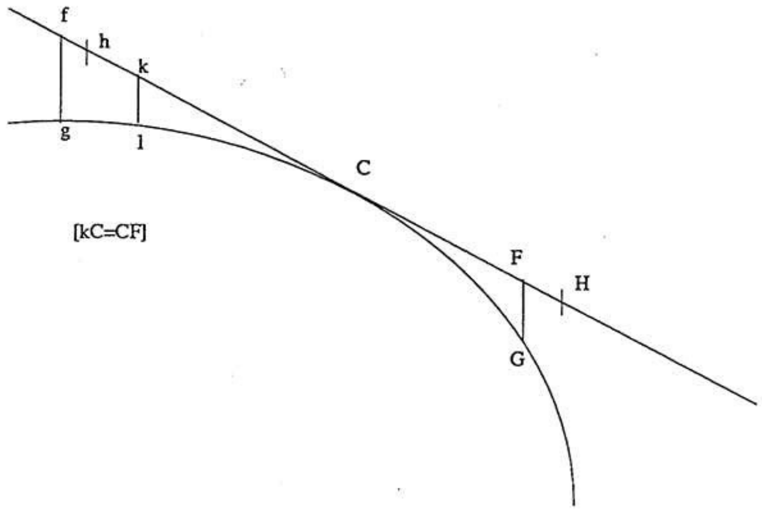

FIGURA 3

Accettando indiscriminatamente tali premesse, ovvero considerando γ come la saetta (comune) dei due archi CG e gC e non come il limite comune delle

seguendo il testo originale, dalle ipotesi relative al movimento retrogrado, che potremmo formulare come segue (mi riferisco qui alle sole proprietà di tale movimento che agiscono effettivamente nella deduzione):

a) i due mobili hanno, nel punto C la medesima velocità istantanea (le forze d'inerzia a cui essi sono sottoposti sono, quindi, uguali e contrarie);
b) essi sono contemporaneamente in C nell'istante t e in F e in f nell'istante $t+\theta$;
c) la resistenza che si oppone al primo moto e promuove il secondo è, nel punto C, espressa da forze uguali (che indicherò rispettivamente con r_- e r_+).

Dall'ipotesi (a), Newton trae la (25)(i), mentre dalla (b) egli deriva la (25)(iv) (la resistenza, agendo durante lo stesso tempo, produrrà lo stesso effetto). Ragionando sul secondo moto come sul primo, egli trae, poi

$$\frac{r_+}{g} = \frac{fh}{fg} \quad \text{da cui, secondo (c), segue:} \quad \frac{r_+}{g} = \frac{fh}{fg} = \frac{r_-}{g} = \frac{FH}{FG}$$

che, congiuntamente alla (25)(iv), implica la (25)(ii). Se non è difficile rendersi conto che le (25) sono geometricamente compatibili fra loro, solo se la curva è presa come una parabola, è chiaro che Newton non le trae da una simile approssimazione che rende nullo l'effetto della resistenza che deve, invece, venir studiato. L'annesso [7] mostra, quindi, in un certo qual modo, proprio il ragionamento che Newton *non* fece.

due differenti saette, Lagrange compendia la fallace deduzione di Newton del corollario 2 nei termini seguenti.

Si cerchi la saetta $\gamma^*[= kl]$ dell'arco lC sotteso dal segmento tangenziale $\alpha - \rho$, preso a sinistra di C. Siccome, negli archi infinitamente piccoli, le saette stanno fra loro come i quadrati dei segmenti tangenziali (che possono equipararsi agli archi), si ha:

$$(26) \qquad \gamma^* = \gamma \left[\frac{\alpha-\rho}{\alpha+\rho}\right]^2$$

e, quindi:

$$(27) \qquad \begin{aligned} &i) \quad \delta = \gamma - \gamma^* = \gamma \left[1 - \left(\frac{\alpha-\rho}{\alpha+\rho}\right)^2\right] = \frac{4\alpha\gamma\rho}{(\alpha+\rho)^2} \\ &ii) \quad \rho = \frac{\delta(\alpha+\rho)^2}{4\alpha\gamma} \\ &iii) \quad \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta(\alpha+\rho)^2}{4\alpha\gamma^2} \end{aligned}$$

e, omettendo ρ rispetto a α (e sviluppando in serie relativamente alla curva, secondo un incremento indeterminato ω, preso come infinitamente piccolo)[42]:

$$(28) \qquad \begin{aligned} \frac{\rho}{\gamma} &= \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}\left[= \frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}\right] = \frac{FH}{FG} = \frac{r_t}{g} = \\ &= \frac{\sqrt{1+[y'_x]^2}\left[-\frac{y'''_x}{3} - \frac{y''''}{3.4.5}\omega^2 - \&c.\right]}{[y''_x]^2 + \frac{2}{3}[y''_x y'''_x]\omega + \&c.} = -\frac{y'''\sqrt{1+[y'_x]^2}}{3[y''_x]^2} \end{aligned}$$

Non è difficile rendersi conto che le omissioni di cui alla (28) dipendono tutte dal fatto che il rapporto $\frac{FH}{FG} = \frac{\rho}{\gamma}$ esprime il rapporto cercato fra la resistenza puntuale e la gravità *solo* se l'intervallo temporale considerato è assunto come infinitamente piccolo. Il procedimento di Newton appare, quindi, il seguente. Stabilita la (16) (che occorre leggere in modo analogo alla (17)), egli considera *separatamente* un insieme di entità geometriche, formulando delle equiparazioni che trasformano, per sostituzioni successive, il rapporto $\frac{FH}{FG}$ in un nuovo rapporto, indipendente dalla velocità, che egli identifica (considerandone il valore limite) con il rapporto cercato. L'eliminazione dei tempi sembra, quindi, derivare dall'uso indiscriminato di un insieme di identità al limite (fra cui un ruolo essenziale è svolto dalla (25)(iv)) per realizzare una catena di sostituzioni che conduce dal rapporto $\frac{FH}{FG}$ al rapporto $\frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}$ e permette di trasformare la (17) nella nuova relazione[43]

$$(29) \qquad \frac{r_t}{g} = \lim_{\omega\to 0} \frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}$$

7.

Per rendere chiaro il carattere dell'errore di Newton, Lagrange deduce il risultato scorretto a cui questo conduce attraverso una procedura alternativa fondata sul classico metodo degli indeterminati, il quale presenta il considerevole vantaggio di rendere minimo il numero delle ipotesi implicite (riducendole all'equiparazione di FH e FG con i moduli dei vettori che esprimono la gravità e la resistenza puntuali), mostrando, nel contempo, in modo del tutto evidente, che le approssimazioni che esse comportano conducono all'omissione di quantità rilevanti rispetto alla determinazione del risultato.

α] Seguendo il testo della prima edizione della *Théorie*, il ragionamento di Lagrange può ricostruirsi come segue[44].
Si consideri θ come un intervallo temporale indeterminato (e finito) e si considerino *separatamente* le forze che, nell'istante t, si compongono, agendo sul mobile posto in C. Indicando con α, γ e ρ i moduli dei vettori che esprimono queste forze, relativamente al tempo θ (in modo che, seguendo la figura 1, si abbia, $\alpha = CH, \gamma = CP, \rho = RC$), avremo (indicando con

(42) Per giustificare l'identità fra parentesi quadre (che riproduce il risultato di Newton nella sua forma originaria) si osservi che γ è intesa sia come la saetta dell'arco gC che come la saetta dell'arco CG. δ è, quindi, tanto la differenza fra le saette degli archi gC e le lC che la differenza fra le saette degli archi CG e le lC. Inoltre se ρ si omette relativamente α a si trae anche: $CH = \alpha = CF = \alpha + \rho$.

(43) Cfr. l'annesso [8].

(44) Ho cercato di rendere esplicita la *sostanza* del ragionamento di Lagrange, permettendomi, a questo scopo, alcune modifiche rispetto alla lettera del testo. Il riferimento è, comunque, a Lagrange (1797), pp. 247–51.

$v_t[= x'_t\sqrt{1+[y'_x]^2}]$ il modulo della velocità istantanea)[45]:

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
&i) && \alpha = v_t\theta\\
&ii) && \gamma = \frac{1}{2}g\theta^2\\
&iii) && \rho = \frac{1}{2}r_t\theta^2\\
&iv) && \alpha-\rho = v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2
\end{aligned}
$$

Il risultato erroneo di Newton deriva facilmente assumendo θ come un intervallo indeterminato infinitamente piccolo e equiparando, quindi, i precedenti valori di γ e $\alpha-\rho$ con i segmenti FG e CF espressi secondo le coordinate della curva. Considerando, per semplicità, le proiezioni sugli assi, indicando con φ l'angolo che la tangente in C forma con l'asse delle ascisse e ponendo $\omega = BD$ (fig. 2), si avrà anche

$$
(31)\qquad \omega = \left[v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\cos\varphi
$$

e (assumendo tali equiparazioni)

$$
(32)\qquad y_{x+\omega} - y_x = y'_x\omega + \frac{y''_x}{2!}\omega^2 + \frac{y'''_x}{3!}\omega^3 + \&c. = \left[v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\sin\varphi - \frac{1}{2}g\theta^2
$$

e, quindi, sostituendo a ω il suo valore (31):

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
&[y'_x v_t\cos\varphi - v_t\sin\varphi]\theta+\\
&+\left[-\frac{y'_x}{2}r_t\cos\varphi + \frac{y''_x}{2}[v_t]^2\cos^2\varphi + \frac{r_t}{2}\sin\varphi + \frac{g}{2}\right]\theta^2+\\
&+\left[-\frac{y''_x}{2}v_t r_t\cos^2\varphi + \frac{y'''_x}{3!}[v_t]^3\cos^3\varphi\right]\theta^3 + \&c. = 0
\end{aligned}
$$

da cui, eguagliando a zero i coefficienti delle potenze di θ, si trae, successivamente:

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
&i) && y'_x = tg\varphi\\
&ii) && [v_t]^2 = -\frac{g}{y''_x\cos^2\varphi} = -\frac{g(1+[y'_x]^2)}{y''_x}\\
&iii) && r_t = -\frac{g y'''_x}{3[y''_x]^2\cos\varphi} = -\frac{g y'''_x\sqrt{1+[y'_x]^2}}{3[y''_x]2}
\end{aligned}
$$

(45) La considerazione separata delle forze, permette, ovviamente, di prendere la resistenza come una forza variabile, agente secondo una direzione costante.

Un tale procedimento è, come è chiaro, fondato sull'omissione dai valori effettivi di CF e FG dei termini che dipendono dalla variazione dell'intensità e della direzione di inerzia e resistenza che si verifica durante il tempo θ. Se entrambe queste omissioni sono inizialmente giustificate dal carattere infinitesimale di θ, la deduzione del valore della resistenza puntuale, tramite l'annullamento del coefficiente di θ^3, rende esplicito che esse sono, in questo contesto, illegittime: l'omissione non può, quindi, che riguardare i termini superiore al terzo.

Il procedimento può d'altra parte, essere facilmente corretto, eliminando da esso ogni presupposizione infinitesimalista. La chiave della correzione risiede, ovviamente, nella scomposizione delle forze lungo due direzioni fisse, che, per comodità, sono assunte come ortogonali fra loro e parallele agli assi. L'effetto della variazione della direzione dell'inerzia e della resistenza può, così, essere espresso, tanto nel valore di ω che in quello di $y_{x+\omega}-y_x$, da una serie di termini indeterminati di ordine superiore al secondo, che possono facilmente comporsi con i termini dovuti alla variazione dell'intensità delle stesse forze. Indicando con a_1, a_2, &c. e b_1, b_2, &c. la somma dei coefficienti di tali termini, relativamente alla direzione degli assi, la (31) e la (32) si trasformano, allora, nelle due nuove identità:

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
&i) && \omega\left[= x'_t\theta + \frac{x''_t}{2!}\theta^2 + \frac{x'''_t}{3!}\theta^3 + \&c.\right] = \left(v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right)\cos\varphi+\\
&&& \qquad + a_1\theta^3 + a_2\theta^4 + \&c.\\
&ii) && y_{x+\omega} - y_x = y'_x\omega + \frac{y''_x}{2!}\omega^2 + \frac{y'''_x}{3!}\omega^3 + \&c.\\
&&& \qquad \left[= y'_t\theta + \frac{y''_t}{2!}\theta^2 + \frac{y'''_t}{3!}\theta^3 + \&c.\right] =\\
&&& \qquad = (v_t\sin\varphi)\theta - \left(\frac{1}{2}r_t\sin\varphi + \frac{1}{2}g\right)\theta^2 + b_1\theta^3 + b_2\theta^4 + \&c.
\end{aligned}
$$

Il problema si riduce, allora, alla determinazione dei termini a_1 e b_1 (il valore di r_t risulta, infatti – come abbiamo visto – indipendente dai termini successivi, che, comunque, possono venir determinati analogamente). Se la considerazione dei dati meccanici del problema è, a questo scopo, insufficiente, la legge generale di formazione dei coefficienti di una serie intera permette una deduzione totalmente analitica. Confrontando gli ultimi membri delle (35) con le forme generiche a cui esse corrispondono (che ho indicato fra parentesi quadre) si ha, infatti:

$$(36)\quad \begin{aligned} i)\quad & x'_t = v_t \cos\varphi \\ & x''_t [= v'_t \cos\varphi - v_t(\sin\varphi)\varphi'] = -r_t \cos\varphi \\ ii)\quad & y'_t = v_t \sin\varphi \\ & y''_t [= v'_t \sin\varphi + v_t(\cos\varphi)\varphi'] = -r_t \sin\varphi - g \end{aligned}$$

da cui, per facili manipolazioni algebriche, si trae:

$$(37)\quad v_t\varphi' = -g\cos\varphi$$

e, quindi:

$$(38)\quad \begin{aligned} i)\quad x'''_t &= 3!a_1 = -r'_t \cos\varphi + r_t(\sin\varphi)\varphi' = \\ &= -r'_t\cos\varphi - \frac{gr_t \sin\varphi\cos\varphi}{v_t} \\ ii)\quad y'''_t &= 3!b_1 = -r'_t\sin\varphi - r_t(\cos\varphi)\varphi' = \\ &= -r'_t\sin\varphi + \frac{gr_t\cos^2\varphi}{v_t} \end{aligned}$$

Introducendo questi termini in (33) e azzerando il nuovo valore del terzo coefficiente così ottenuto si ha (in accordo con (34)(i) e (ii)) il corretto valore di r_t/g:

$$(39)\quad \frac{r_t}{g} = -\frac{y'''_x}{2[y''_x]^2\cos\varphi} = -\frac{y'''_x\sqrt{1+[y'_x]^2}}{2[y''_x]^2}$$

β] Forse allo scopo di mostrare più esplicitamente i legami fra la propria deduzione e quella originaria di Newton, nella seconda edizione della *Théorie*, Lagrange riformula la propria deduzione analitica nei termini seguenti[(46)] (che mi paiono fornire ulteriori elementi di chiarimento).

Considerato ancora θ come un intervallo infinitesimo di tempo, durante il quale le forze restano costanti, cerchiamo il tempo ϑ durante il quale il mobile sottoposto al secondo movimento descriverebbe (in assenza di gravità) un segmento tangenziale uguale a $\alpha - \rho$. Imponendo l'identità degli spazi si ha l'equazione:

$$(40)\quad v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2 = v_t\vartheta + \frac{1}{2}r_t\vartheta^2$$

---

(46) Cfr. Lagrange (1813), pp. 342–49.

che, prendendo il valore positivo della radice conduce all'identità:

$$(41)\quad \vartheta = \theta - \frac{r_r}{v_t}\theta^2 + \frac{r_t^3}{v_t^2}\theta^2 + \&c.$$

Si indichi, ora, con $\gamma^* = \frac{1}{2}g\vartheta^2$ il segmento verticale che il mobile percorrerebbe nel tempo ϑ se su di esso non agisse la che forza di gravità e con δ la differenza $\gamma - \gamma^*$. Sistituendo si avrà, allora:

$$(42)\quad \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}g\left[\theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 + \frac{r_t^3}{v_t^2}\theta^3 + \&c.\right]^2 = \\ &= \frac{gr_t}{v_t}\theta^3 + \frac{gr_t^2}{v_t^2}\left[r_t + \frac{1}{2}\right]\theta^4 + \&c. \end{aligned}$$

Prendendo α e γ come in (30)(i) e (iii) si ritrova, quindi, a *posteriori*, il risultato erroneo di Newton:

$$(43)\quad \frac{r_t}{g} = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0}\frac{\delta(\alpha-\rho)}{4\gamma^2} = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0}\frac{\left(v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right)\left(\frac{gr_t}{v_t}\theta^3 + \&c.\right)}{g^2\theta^4}$$

che corrisponde, dunque, alla considerazione delle forze puntuali isolatamente prese.

Passando, ora, alla corretta considerazione dei segmenti riferiti alla curva, avremo (secondo le (36) e la (38) e ricordando che $y'_x = tg\varphi$):

$$(44)\quad \begin{aligned} FG &= -\frac{y''_x}{2!}\omega^2 - \frac{y'''}{3!}\omega^3 - \&c. = (y_t - y_{t+\theta}) + y'_x\omega \\ &= -y'_t\theta - y''_t\frac{\theta^2}{2!} - y'''_t\frac{\theta^3}{3!} - \&c. + \\ &\quad + y'_x\left[x'_t\theta + x''_t\frac{\theta^2}{2!} + x'''_t\frac{\theta^3}{3!} + \&c.\right] \\ &= [-v_t\sin\varphi + y'_x v_t\cos\varphi]\theta + [r_t\sin\varphi + g - y'_x r_t\cos\varphi]\frac{\theta^2}{2} + \\ &\quad + [-b_1 + y'_x a_1]\theta^3 + \&c = \frac{1}{2}g\theta^2 + [y'_x a_1 - b_1]\theta^3 + \&c. \end{aligned}$$

e, quindi, ponendo $B_1 = y'_x a_1 - b_1$:

$$
(45)\qquad
\begin{aligned}
&i)\ CH = \alpha = v_t\theta\\
&ii)\ FG = \gamma + o(\theta^2) = \frac{1}{2}g\theta^2 + B_1\theta^3 + \&c.\\
&iii)\ BD = \sqrt{(\alpha-\rho)^2 - (\alpha-\rho)^2\sin\varphi} + o(\theta^2) =\\
&\qquad = \left[v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\cos\varphi + a_1\theta^3 + \&c.\\
&iv)\ CF = \alpha - \rho + o(\theta^2) = v_t\theta - \frac{1}{2}g\theta^2 + \frac{a_1}{\cos\varphi}\theta^3 + \&c.\\
&v)\ kl = \gamma^* + o(\vartheta^2) = \frac{1}{2}g\vartheta^2 - B_1\vartheta^3 + \&c.\\
&vi)\ FG - kl = \delta + o(\theta^2) = \frac{1}{2}g[\theta^2 - \vartheta^2] + B_1[\theta^3 + \vartheta^3] + \&c.
\end{aligned}
$$

Se l'errore di Newton è stato correttamente individuato, la sostituzione in (43) di $\delta, \alpha-\rho$ e γ rispettivamente con i precedenti valori $FG-kl, CF$ e FG dovrebbe produrre un nuovo rapporto il cui limite dovrebbe essere uguale a $\frac{2}{3}\frac{r_t}{g}$. È chiaro che, tanto per realizzare questa verifica *a posteriori*, che per ottenere *a priori* il corretto valore di $\frac{r_t}{g}$, sarà sufficiente determinare il valore di B_1 (indipendentemente dalla conoscenza del valore dei suoi addendi $y'_x a_1$ e b_1). Per evitare inutili ripetizioni, Lagrange riformula, allora, la deduzione proposta nella prima edizione in forma piú agile, introducendo in essa semplici modificazioni locali. Mi limiterò qui alla seconda parte del ragionamento (il lettore non avrà difficoltà a capire come la derivazione del risultato di Newton possa essere riformulata, eliminando i termini di ordine superiore al secondo).

Confrontando i coefficienti di θ^2 in (35)(ii) si avrà (secondo la (36)(i))

$$y''_t = -r_t\sin\varphi - g = x''_t\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - g = x''_t y'_x - g$$

e, quindi, $y'''_t = x'''_t y'_x + [y'_x]'_t x''_t$.

Essendo, d'altra parte, $y'_t = y'_x x'_t$, si avrà anche $y''_t = [y'_x]'_t x'_t + y'_x x''_t$, ovvero:

$$[y'_x]'_t = \frac{y''_t - y'_x x''_t}{x'_t} = -\frac{g}{x'_t}.$$

È allora ovvio che:

$$(46)\qquad y'_x x'''_t - y'''_t = 3!B_1 = \frac{g}{x'_t}x''_t = -\frac{gr_t}{v_t}$$

Per ottenere il risultato corretto è, allora, sufficiente sostituire questo valore nella (44) (ricordandosi della (35)(i)[47]) e azzerare il coefficiente di Θ^3. Facendo i calcoli si avrà, infatti:

$$
(47)\qquad
\begin{aligned}
&i)\ -\frac{y''_x}{2!}\omega^2 - \frac{y'''_x}{3!}\omega^3 - \&c. = g\frac{\theta^2}{2} - \frac{gr_t}{v_t}\frac{\theta^3}{3!} + \&c.\\
&ii)\ [g + y''_x v_t^2\cos^2\varphi]\frac{\theta^2}{2!} +\\
&\qquad + \left[-\frac{gr_t}{v_t} - 3y''_x v_t r_t\cos^2\varphi + y'''_x v_t^3\cos^3\varphi\right]\frac{\theta^3}{3!} + \&c. = 0
\end{aligned}
$$

da cui, azzerando i coefficienti, seguono successivamente la (34)(ii) e la (39).

Altrettando facile è la verifica *a posteriori*. Introducendo nella (40) i termini di ordine superiore al secondo si ottiene, infatti:

$$(48)\qquad \vartheta = \theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 + A_1\theta^3 + \&c.$$

(con A_1 un coefficiente dipende da a_1) e, quindi, sostituendo in (45) (vi):

$$(49)\qquad FG - kl = \left[\frac{gr_t}{v_t} + 2B_1\right]\theta^3 + C_1\theta^4 + \&c.$$

(con C_1 un coefficiente dipendente tanto da a_1 che da b_1). Sostituendo in (43), secondo le (45) si avrà, allora (ricordando la (46)):

$$
(50)\qquad
\begin{aligned}
&\lim_{\Theta\to 0}\frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2} =\\
&= \lim_{\Theta\to 0}\frac{\left(\left[\frac{gr_t}{v_t} + 2B_1\right]\theta^3 + C_1\theta^4 + \&c.\right)\left(v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2 + \&c.\right)}{4\left(\frac{1}{2}g\theta^2 + B_1\theta^3 + \&c.\right)^2}\\
&= \frac{r_t}{g} + \frac{2B_1v_t}{g^2} = \frac{2}{3}\frac{r_t}{g}
\end{aligned}
$$

8.

La vicenda relativa alla proposizione X del secondo libro dei *Principia* è, per di più una ragione, una vicenda esemplare. Scopo del mio lavoro

[47] Ho reso, qui, più agile la deduzione di Lagrange che, invertendo la (35)(i), esprime la (44) in funzione di ω.

era di puntare l'attenzione su alcune di queste ragioni, forse più nascoste di altre. La scelta di dedicare le mie riflessioni al confronto fra le soluzioni *analitiche* di Lagrange e la prima soluzione *geometrica* di Newton è stata del tutto funzionale a questo limitato obiettivo. La ricerca di altre ragioni avrebbe condotto, infatti, a insistere, piuttosto, sulle soluzioni di Bernoulli o Euler, su quella di Hermann o sulla seconda di Newton.

Ciò che ho cercato di mostrare è che se, da una parte, il metodo risolutivo di Newton e la *fisolsofia matematica* che lo sorregge non impediscono in alcun modo una comprensione profonda dei termini intrinseci in cui il problema si pone, dall'altra, essi costituiscono un insormontabile ostacolo alla possibilità di pervenire alla sua soluzione corretta nei termini di un confronto fra gli spazi generati, durante un tempo dato, per effetto della resistenza puntuale e della gravità. Questa strategia risolutiva, che pure è, senza dubbio, la più agile e la più immediata, richiede l'introduzione inevitabile dei metodi analitici.

La soluzione di Lagrange e la sua analisi della dimostrazione di Newton mostrano che l'errore di questi non può essere ricondotto a una scorretta scomposizione del movimento. Se le (45) permettono, infatti, di concludere (senza alcuna necessità di svolgere il calcolo esplicito B_1) che l'identità

$$\frac{r}{g} = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0} \frac{(fg-kl)CF}{4(FG)^2} \tag{51}$$

(che si riduce alla (29) per mezzo della (25)(iv)) è corretta[48], l'adeguata soluzione del problema non richiede tanto di far agire la resistenza puntuale lungo la direzione verticale, quanto di concettualizzare che il limite di

(48) Per calcolare fg basta, infatti, sostituire $-\theta$ a θ nel valore di FG. Ciò permette di trarre, secondo la (48):

$$fg - kl = \frac{1}{2}g\theta^2 - B_1\theta^3 - \&c. - \frac{1}{2}g\left(\theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 - \&c.\right)^2 + \\ + B_1(\theta - \&c.)^3 - \&c. = \frac{gr_t}{v_t}\theta^3 + \&c.$$

e, quindi,

$$\operatorname*{Lim}_{\theta\to 0}\frac{CF(fg-kl)}{4(FG)^2} = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0}\frac{(v_t\theta + o(\theta))\left(\frac{gr_t}{v_t}\theta^3 + o(\theta^3)\right)}{g^2\theta^4 + o(\theta^4)} = \\ = \operatorname*{Lim}_{\theta\to 0}\frac{r_t g\theta^4 + o(\theta^4)}{g^2\theta^4 + o(\theta^4)} = \frac{r_t}{g}$$

$\frac{FH}{FG}$ dipende dalle variazioni della resistenza e della velocità. Le questioni interessanti mi paiono, allora, le seguenti:

1) il metodo di Newton è matematicamente adeguato a permettere la comprensione di questo punto?
2) esso fornisce i mezzi per superare una tale difficoltà?

La risposta alla prima domanda mi pare problematica. Da una parte si può, infatti, sostenere che Newton avrebbe potuto rendersi conto, in termini strettamente geometrici (considerando la differenza $dB - BD$ come un infinitesimo del second'ordine) che la quantità $fg - kl$ è un infinitesimo del terzo ordine e che se è, quindi, uguale al second'ordine a $FG - kl$ è, anche, a questo ordine, nulla, di modo che il rapporto $\frac{rt}{g}$ resta, al second'ordine, indeterminato. A ciò è possibile, d'altra parte, obiettare:

i) che il linguaggio di Newton è assai differente da questo e che le sue identità hanno, piuttosto, la forma $A/B \rightarrow 1$, nella quale l'ordine resta indeterminato;
ii) che egli non utilizza (per scelta epistemologica) lo strumento dello sviluppo in serie del corso della soluzione;
iii) che egli mescola identità geometriche con identità meccaniche, dovute, più che alla figura, alle proprietà del moto retrogrado, che $fg = FG$ è proprio un'identità di tal genere e che questo *mélange* costituisce il cuore del suo metodo risolutivo;
iv) che lo stesso D. Bernoulli non riuscì, pur dal suo punto di vista infinitesimalista a scorgere questo punto;
v) che perfino Langrage non sa che esprimerlo usando uno strumento estrinseco al metodo di Newton.

Per ciò che riguarda la seconda domanda, la risposta è senza dubbio negativa: anche qualora questa difficoltà fosse stata scorta, la soluzione del problema, nei termini di una adeguata trasformazione del rapporto $\frac{HF}{FG}$, richiederebbe l'introduzione di procedure analitiche capaci di trarre dai dati geometrici e meccanici concessi gli effetti *iniziali* della variazione (in intensità e direzione) della velocità e della resistenza.

Tuttavia, se analizziamo le soluzioni proposte da Lagrange, sia quelle condotte secondo il *metodo delle funzioni derivate* (paragrafo 2), che quelle condotte secondo il *metodo delle serie*[49] (paragrafo 7), troviamo in esse un dato comune che le lega intrinsecamente a quella di Newton. Esse non sono,

(49) Cfr. Lagrange (1813), pp. 347–48

in ultima istanza, che la conseguenza del confronto fra due modi di intendere la curva ACK: come espressione del legame fra *un'*ascissa e *un'*ordinata (o, se si preferisce, due coordinate generiche) e come traccia di un moto che, realizzandosi in un tempo, determina su due assi ortogonali delle proiezioni variabili dipendenti dal tempo e, *a priori*, indipendenti fra loro. Le *quantità* che la curva determina possono, così, avere *forme* diverse.

Dove Newton vedeva un difficile (e affascinante) problema meccanico: la determinazione di una forza e di una velocità in funzione della traiettoria che esse determinano, Lagrange vede, un secolo più tardi, un generico problema analitico: determinare i rapporti generali che si instaurano fra le forme delle derivate successive di una stessa quantità intesa come funzione di due diverse varibili. Ma è, a me pare, prorpio il *modo newtoniano* di pensare la curva – come espressione di una relazione fra due funzioni di una variabile comune – che rende possibile interpretare il primo come un caso particolare del secondo.

Dietro la divergenza fra sintesi e analisi vi sono, nell'evoluzione del pensiero matematico, dei fili che in larga misura sono ancora da ricostruire. In questo lavoro non ho fatto che seguire una traccia che lo stesso Lagrange ci fornisce.

Annessi

A.[1]

Cfr. in particolare Lagrange (1811 – 15), vol 1, pp. 252 – 3.

L'equazione generale della dinamica, tratta nella *Mécanique analytique*, secondo il principio delle velocità virtuali è:

$$[1](1)\qquad \sum_{i=1}^{n} M_i\left[\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i+P_i\delta p_i+Q_i\delta q_i+\&c.\right]=0$$

in cui M_i è la massa del corpo di coordinate rettangole (x_i, y_i, z_i) e $M_i\,P_i$, $M_i\,Q_i$, &c. sono le forze che agiscono su di esso, lungo le direzioni p_i, q_i, &c. e con verso tendente a far diminuire la distanza fra il corpo e il proprio centro.

Sia M_iR_i la forza di resistenza agente sul corpo di coordinate (x_i, y_i, z_i), il cui centro dovrà essere supposto sulla tangente alla curva traiettoria nel punto considerato. Assumendo tale centro come infinitamente vicino al corpo, si avrà, indicando con a_i, b_i, c_i le sue coordinate rettangole:

$$[1](2)\qquad \begin{aligned}\delta r_i &= \delta\left[\sqrt{(x_i-a_i)^2+(y_i-b_i)^2+(z_i-c_i)^2}\right]\\ &= \delta\left[\sqrt{dx_i^2+dy_i^2+dz_i^2}\right]=\delta[ds_i]\\ &= \frac{dx_i}{ds_i}\delta x_i+\frac{dy_i}{ds_i}\delta y_i+\frac{dz_i}{ds_i}\delta z_i\end{aligned}$$

Se si considera un corpo isolato di massa unitaria, su cui agisce, oltre la resistenza, anche una gravità costante diretta lungo l'asse y, avremo, ponendo $P = g$ e $Q = R$:

$$[1](3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^3}\delta z+g\delta y+R\left[\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right]=0$$

da cui, eguagliando separatamente a zero i coefficienti delle variazioni indeterminate $\delta x, \delta y, \delta z$ si trae (essendo, in generale, $ds = vdt$):

$$[1](4)\qquad \begin{aligned}&i)\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-R\frac{dx}{ds}=-\frac{R}{v}\frac{dx}{dt}\\ &ii)\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-R\frac{dy}{ds}-g=-\frac{R}{v}\frac{dy}{dt}-g\\ &iii)\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-R\frac{dz}{ds}=-\frac{R}{v}\frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

che corrispondono chiaramente alle (1).

A.[2]

Cfr. Lagrange (1797), pp. 239–40 e (1813), pp. 332–3

Per un procedimento alternativo, cfr. Lagrange (1801), pp. 47–52.

Siano $x = x_t$ e $y = y_t$. Si avrà:

$$[2](1)\qquad \begin{aligned}&i)\quad x_{t+\theta}-x_t=x_t'\theta+x_t''\frac{\theta^2}{2!}+x_t'''\frac{\theta^3}{3!}+\&c.\\ &ii)\quad y_{t+\theta}-y_t=y_t'\theta+y_t''\frac{\theta^2}{2!}+y_t'''\frac{\theta^3}{3!}+\&c.\end{aligned}$$

D'altra parte considerando y come una funzione di x, si avrà:

$$[2](2)\qquad y_{x+\omega}-y_x=y_x'\omega+y_x''\frac{\omega^2}{2!}+y_x'''\frac{\omega^3}{3!}+\&c.$$

Ma, essendo ω variabile, possiamo considerla come una funzione di t e porre:

[2](3) $$\omega = \omega_t = x'_t\theta + x''_t\frac{\theta^2}{2!} + x'''_t\frac{\theta^3}{3!} + \&c.$$

In tal modo, l'incremento θ relativamente a y_t corrisponderà all'incremento ω relativamente a y_x e si avrà, quindi, assunta la [2](3):

[2](4) $$y_{t+\theta} - y_t = y_{x+\omega} - y_x$$

ovvero, sostituendo:

[2](5) $$\begin{aligned} y'_t\theta + y''_t\frac{\theta^2}{2!} + y'''_t\frac{\theta^3}{3!} + \&c. &= (y'_x x'_t)\theta + (y'_x x''_t + y''[x'_t]^2)\frac{\theta^2}{2!} + \\ &+ [y'_x x'''_t + 3y''_x x'_t x''_t + y'''_x[x'_t]^3]\frac{\theta^3}{3!} + \&c. \end{aligned}$$

da cui le (3) seguono immediatamente secondo il metodo dei coefficienti indeterminati.

Si ricordi che tale metodo si fonda sull'implicazione

[2](6) $$\forall x[A + Bx + Cx^2 + \&c.] = 0 \Rightarrow (A = 0) \wedge (B = 0) \wedge (C = 0) \wedge \&c.$$

che non è altro che un'estensione infinitaria di una triviale inferenza algebrica.

A.[3]
Cfr. de Prony (1810 – 15), vol. II, pp. 137 – 38

Rappresentando le forze tramite le variazioni di spazio che esse producono, avremo, nel caso del movimento di un corpo in un mezzo resistente (indicando con r la forza di resistenza e con g la gravità costante):

[3](1) $$\begin{aligned} &i) \quad d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(r\frac{dx}{ds}\right)dt \\ &ii) \quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(g + r\frac{dy}{ds}\right)dt \end{aligned}$$

e, differenziando rispetto a x:

[3](2) $$\begin{aligned} &i) \quad \frac{dxd^2t}{dt^2} = \left(r\frac{dx}{ds}\right)dt \\ &ii) \quad \frac{d^2ydt - dyd^2t}{dt^2} = -gdt - \left(r\frac{dy}{ds}\right)dt \end{aligned}$$

Eliminando d^2t fra tali equazioni si ha:

[3](3) $$d^2y = -gdt^2$$

e, ponendo $y = \int zdx$ (considerando ancora dx come costante):

[3](4) $$dzdx = -gdt^2$$

e, passando ai differenziali:

[3](5) $$d^2zdx = -2gdtd^2t$$

Sostituendo in [3](2)(i) e in [3](5) il valore di dt tratto da [3](4) e eliminando d^2t fra le due equazioni così trovate si ha:

[3](6) $$\frac{r}{g} = -\frac{d^2zds}{2dz^2dx}\left[= -\frac{d^2z\sqrt{1+z^2}}{2dz^2}\right] \quad \left[z = \frac{dy}{dx}\right]$$

Moltiplicando, poi, la [3](4) per $\frac{ds^2}{dt^2dzdx}$ si trae:

[3](7) $$\frac{ds^2}{dt^2} = -g\frac{ds^2}{dzdx}$$

ovvero:

[3](8) $$v^2 = -g\frac{ds^2}{d^2y}\left[= -g\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right]$$

A.[4]
Cfr. Varignon (1707), pp. 384–88.

Diciamo *resistenza* l'ostacolo opposto da un mezzo al movimento di un corpo, *velocità primitiva* la velocità che il mobile che si muove in un mezzo avrebbe, in assenza di resistenza, e *velocità restante* la velocità effettiva del mobile in presenza della resistenza.

La teoria del moto resistente può ridursi al seguente *problema generale:*

Date le curve delle velocità primitive e delle resitenze istantanee, determinare l'equazione delle curve delle resistenze totali e delle velocità restanti.

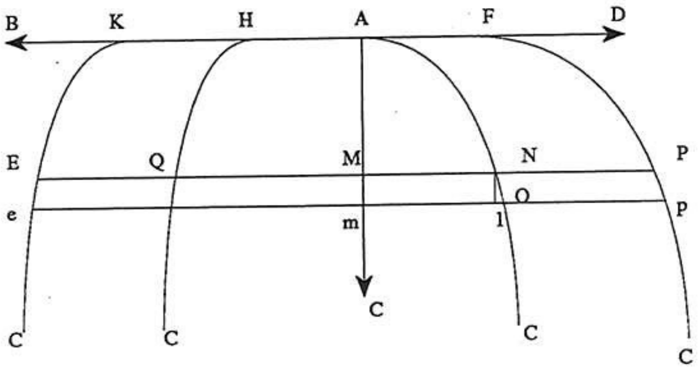

FIGURA 4

SOLUZIONE — Fissati due assi ortogonali AC e BD, siano, rispettivamente, $MN = r, MQ = u, MP = v$ proporzionali alla resistenza (totale) opposta dal mezzo a un mobile durante il tempo $AM = t$, alla velocità restante di tale mobile dopo lo stesso tempo e alla velocità che esso avrebbe ancora, dopo questo tempo, se su di esso non avesse agito la resistenza del mezzo (velocità primitiva). Da tali ipotesi segue, essendo la resistenza proporzionale alla diminuzione della velocità che essa comporta, $NP = v - r = MQ = u$. Sia, ora, $Mm = dt$ una parte infinitesima di tempo e, quindi, $t + dt$ l'istante successivo a t. $mn = r + dr$ e $mp = v + dv$ saranno, allora, rispettivamente proporzionali alla resistenza (totale) opposta dal mezzo allo stesso mobile durante il tempo $t + dt$ e alla velocità che quest'ultimo avrebbe, dopo tale tempo, se la resistenza non avesse agito. Se le ordinate $ME = z$ e $me = z + dz$ sono prese proporzionali alla resistenza istantanea incontrata dal mobile negli istanti t e $t + dt$, l'incremento $ln = dr$ della resistenza totale relativo a dt sarà, a propria volta, proporzionale a $(ME)dt$ e, quindi, il rapporto $\dfrac{ln}{ME} = \dfrac{dr}{zdt}$ sarà costante. Indicata con a una quantità costante qualsiasi si potrà, allora, porre

$$[4](1) \qquad \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a}$$

che sarà l'equazione cercata e che esprime le curve ANC e HQC delle resistenze totali e delle velocità restanti in funzione delle curve FPC e KEC delle velocità primitive e delle resistenze istantanee.

A.[5]
Cfr. Hermann (1716), App. XI e XII, pp. 395–98

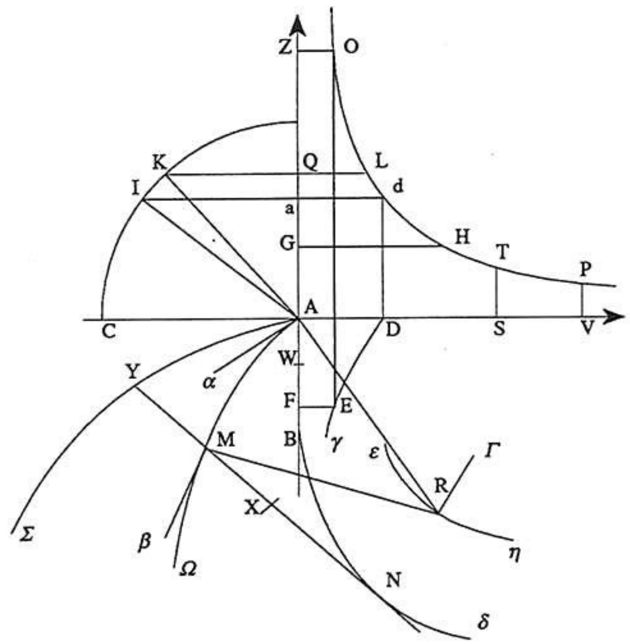

FIGURA 5

Sia $AM\Omega$ una curva qualsiasi descritta da un mobile che cade in un mezzo sotto l'azione di una gravità g variabile che agisce lungo la direzione della normale a una curva $AY\Sigma$, che è, a sua volta, tangente a un'altra curva $BN\delta$. La tangente AB alla curva $BN\delta$ sia prolungata fino a Z, in modo che si abbia $AZ = MN$. Sui lati dell'angolo retto ZAC, formato dal prolungamento di AB e dalla tangente CAV alla curva $AY\Sigma$, venga tracciato un quarto di cerchio, il cui raggio AI sia tale che se l'angolo $C\widehat{A}I$ è preso uguale all'angolo $B\widehat{A}\alpha$ (fra la normale AB alla curva $AY\Sigma$ e la tangente $A\alpha$ alla curva $AM\Omega$), la proiezione Aa di tale raggio sull'asse AZ risulta uguale a AB. Il raggio AK di questo cerchio sia, poi, tale che l'angolo $C\widehat{A}K$ risulti uguale all'angolo $N\widehat{M}\beta$ fra la direzione della gravità agente sul mobile in M e la tangente $M\beta$ alla curva $AM\Omega$. I segmenti Ia e KQ paralleli all'asse CAV siano prolungati fino a incontrare in d e L un'iperbole OLP descritta fra i due asintoti ortogonali AZ e AV. A partire dalla proiezione D del punto d sull'asse AV sia descritta una curva $DE\gamma$ tale che alla sua ordinata $AF = YM$ corrisponda un'ascissa FE uguale e parallela all'ascissa ZO dell'iperbole OLP. Considerando la resistenza r come proporzionale alla densità Δ del mezzo e al quadrato della velocità istantanea v del mobile, si inscriva nell'iperbole OLP un quadrilineo $dDST$ di area uguale alla superficie cilindrica di base AM formata elevando sopra ogni punto di tale arco un segmento perpendicolare al piano della figura e di lunghezza proporzionale alla densità puntuale del mezzo.

Data questa costruzione, Hermann dimostra successivamente le due proposizioni seguenti:

i) *Se la velocità del mobile nel punto A (velocità iniziale) è proporzionale al segmento AD e il quadrilineo $aGHd$ ha area uaguale al quadrilineo $DEFA$, allora la velocità acquista dal mobile dopo aver percorso l'arco AM della curva $AM\Omega$ (proporzionale, a sua volta al segmento AV) sta alla velocità iniziale come $(Aa)^2(AD)$ sta a $(AQ)(AG)(AS)$.*

ii) *Se le gravità che agisce sul mobile nei punti A e M è rispettivamente proporzionale ai segmenti AW e MX e MR è il raggio del cerchio osculatore in M della curva $AM\Omega$, allora MX sta a AW come*

$$\frac{(AV)^2}{(MR)(AQ)} \quad \text{sta a} \quad \frac{(AD)^2}{(AR)(Aa)}.$$

Egli afferma, inoltre, che tramite una dimostrazione analoga è possibile pervenire ai due ulteriori risultati:

iii) *La densità del mezzo in M è proporzionale a*

$$[5](1) \qquad \frac{3(KQ)}{2(AQ)(MR)} - \frac{KQ}{2(AK)(MN)} - \frac{\nu}{2(MX)} - \frac{R\Gamma}{2(MR)^2}$$

iv) *Il rapporto fra la resistenza e la gravità è proporzionale a*

$$[5](2) \quad \frac{3(KQ)}{2(AK)} - \frac{(R\Gamma)(AQ)}{2(AK)(MR)} - \frac{(KQ)(AQ)(MR)}{2(AK)^2(MN)} - \frac{\nu(AQ)(MR)}{2(AK)(MX)}$$

dove ν è il rapporto fra l'elemento del segmento MX e l'elemento della curva AM e $R\Gamma$ è il raggio del cerchio osculatore in R della curva $\epsilon R\eta$ alla quale appartengono i centri dei raggi osculatori della curva $AM\Omega$ nei suoi punti successivi.

Ora, se l'intensità della gravità è considerata costante il rapporto $\nu \left[\propto \frac{dg}{ds}\right]$ diviene nullo, mentre se essa è considerata agire lungo una direzione fissa (ovvero parallelamente all'asse AB) il segmento MN diviene infinito. Le proposizioni (iii) e (iv) si riducono, quindi, rispettivamente, alle identità:

$$[5](3) \qquad \Delta = \frac{3(KQ)}{2(AQ)(MR)} - \frac{R\Gamma}{2(MR)^2}$$

$$[5](4) \qquad \frac{r}{g} = \frac{3(KQ)}{2(AK)} - \frac{(R\Gamma)(AQ)}{2(AK)(MR)}$$

Si indichi, allora con y l'ordinata della curva $AM\Omega$, lungo la cui direzione si assume agisca la gravità, con x la rispettiva ascissa (ortogonale) e con ρ il raggio del cerchio osculatore della stessa curva riferito al punto di coordinate generiche x, y.

Per costruzione avremo:

$$\frac{KQ}{AQ} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{KQ}{AK} = \frac{dy}{ds}; \quad \frac{AQ}{AK} = \frac{dx}{ds}$$

[la verifica è triviale considerando il raggio AI come unitario e ricordando che gli angoli $C\hat{A}K$ e $N\widehat{M}P$ sono uguali – agendo costantemente la gravità lungo la direzione dell'asse delle ordinate – mentre l'angolo $C\hat{A}K$ è uguale a $90° - \varphi$, dove φ è l'angolo che la tangente in M alla curva $AM\Omega$ forma con l'asse delle ascisse] e

$$\frac{R\Gamma}{MR} = \frac{d\rho}{ds}.$$

e, quindi (essendo $\rho = \frac{ds^3}{d^2y dx}$ e prendendo dx costante):

$$[5](5) \qquad \Delta = \frac{3dy}{2\rho dx} - \frac{d\rho}{2\rho ds} = \frac{3}{2}\frac{dyd^2y}{ds^3} - \frac{3}{2}\frac{dyd^2y}{ds^3} + \frac{d^3y}{2dsd^2y} = \frac{d^3y}{2dsd^2y}$$

$$[5](6) \qquad \frac{r}{g} = \frac{3dy}{2ds} - \frac{d\rho dx}{2ds^2} = \frac{3}{2}\frac{dy}{ds} - \frac{3}{2}\frac{dy}{ds} + \frac{dsd^3y}{2(d^2y)^2} = \frac{dsd^3y}{2(d^2y)^2}$$

conformemente ai risultati di Newton della seconda edizione dei *Principia*.

A.[6]

Cfr. Euler (1736), cap. VI, propp. 104–106 e 111: pp. 369–75 e 389–91.

TEOREMA — *Se un corpo si muove in un mezzo resistente, quale che sia la potenza assoluta che agisce su di esso, la forza di resistenza non modifica l'azione di tale potenza se non diminuendo la forza tangenziale che sorge da essa.*

Ogni potenza assoluta si risolve, infatti, in una forza normale e in una forza tangenziale (se il moto ha luogo in un unico piano) o in una forza tangenziale e in due forze normali (se esso non avviene in un unico piano). La forza che sorge dalla resistenza non può, d'altra parte, che avere sempre la stessa direzione del corpo e deve, quindi, essere ricondotta alla forza tangenziale, la quale non esercita nessuna azione sulla forza normale.

COROLLARIO — *Se T è la forza tangenziale, N e M le forze normali e r la forza di resistenza, le leggi [canones] dimostrate nel precedente capitolo [dedicato al moto curvilineo di un punto libero sollecitato da potenze assolute qualsiasi] avranno ancora luogo relativamente al moto in un mezzo resistente, previa la sostituzione di $T-r$ a T (dove r indica la forza di resistenza).*

PROBLEMA 1 — Determinare le leggi relative al moto di un corpo che si muova in un mezzo resistente sollecitato da potenze assolute qualsiasi, tali che detto moto abbia luogo in un piano.

SOLUZIONE — Sia AMB la curva descritta dal corpo nel suo moto e siano $Mn = ds$ l'elemento di tale curva e $h = 2gz$ un'altezza proporzionale all'altezza z da cui un corpo di massa unitaria deve cadere per toccare terra con velocità istantanea v uguale alla velocità in M del corpo che descrive la curva AMB [di modo che si abbia $v = \sqrt{h}$ [cfr. def. 15, scolio 1, p. 80]]. Siano, inoltre, rispettivamente, N e T la forza normale (agente lungo la direzione MN) e la forza tangenziale (agente lungo la direzione MT) sorte da tutte le potenze assolute. Se ρ indica il raggio del cerchio osculatore alla curva in M, dal corollario precedente seguono le equazioni

[6](1)
$$i)\quad \mathrm{N} = \frac{2h}{\rho}$$
$$ii)\quad dh = (\mathrm{T} - r)ds$$

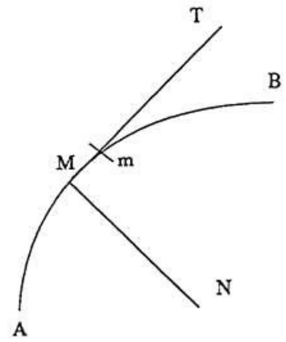

FIGURA 6

da cui, eliminando h, si deduce l'equazione che esprime la natura della curva AMB. La [6](1)(i) dà, inoltre la velocità puntuale del corpo. [Il riferimento è alla prop. 70 del precedente capitolo in cui è risolto il problema analogo per un moto che ha luogo nel vuoto; le equazioni dedotte in tale occasione sono, ovviamente: $\mathrm{N} = \frac{2h}{\rho}$ e $dh = \mathrm{T}ds$].

PROBLEMA 2 — Un corpo sia mosso in un mezzo resistente dall'azione di una forza, la quale agisca ovunque secondo una direzione normale a una data retta AP. Determinare tanto la curva AMB descritta dal corpo che il moto di questo.

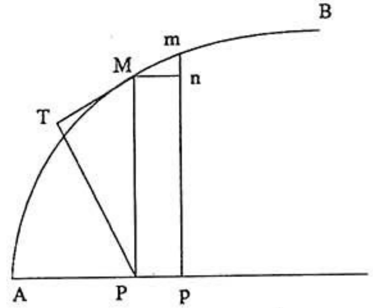

FIGURA 7

SOLUZIONE — Siano P la forza che agisce sul corpo nel punto M, lungo la direzione MP, h l'altezza a cui è dovuta la velocità puntuale di questo e r la forza puntuale di resistenza che si oppone al moto. Si pongano, inoltre, $AP = x, PM = y, Mn = ds, Pp = Mm = dx$ e $mn = dy$ e si tracci la normale PT alla tangente MT. La forza P può allora essere risolta in una forza normale

$$\mathrm{P}\frac{PT}{PM} = \mathrm{P}\frac{dx}{ds}$$

e in una forza tangenziale

$$\mathrm{P}\frac{MT}{MP} = \mathrm{P}\frac{dy}{ds}.$$

Secondo la soluzione del Probl. 1, si avrà, allora (essendo qui la forza tangenziale una forza ritardatrice):

[6](2)
$$\begin{aligned} &i) \quad p\frac{dx}{ds} = \frac{2h}{\rho} \\ &ii) \quad dh = -\mathrm{P}dy - rds \end{aligned}$$

equazioni dalle quali è possibile trarre tanto il moto del corpo che la curva che esso descrive.

COROLLARIO — *Posto dx costante si avrà*

$$\rho = -\frac{ds^3}{d^2ydx}$$

e, quindi,

[6](3)
$$\mathrm{P} = -\frac{2hd^2y}{ds^2}$$

e, sostituendo in [6](2)(iii):

[6](4)
$$dh = \frac{2hdyd^2y}{ds^2} - rds = \frac{2hd^2s}{ds} - rds$$

da cui si può trarre l'equazione della curva quale che sia P.

[Si noti che combinando [6](3) e [6](4) si ha subito, se P è presa come costante:

$$\frac{r}{\mathrm{P}} = -\frac{d^3yds}{2(d^2y)^2}.$$

La soluzione del prossimo problema non è, allora, che una banale conseguenza del corollario precedente.]

PROBLEMA 3 — Posta una potenza assoluta g uniforme e tendente verso il basso, determinare la resistenza puntuale in M che fa sì che il corpo descriva una data curva BAM.

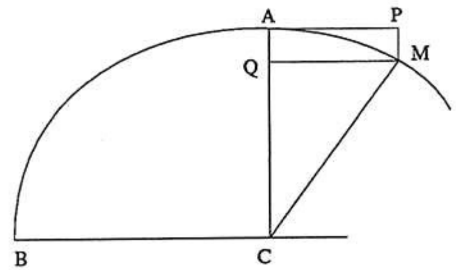

FIGURA 8

SOLUZIONE — Si pongano $AP = QM = x, PM = AQ = y$ e si indichi con ds l'elemento dell'arco AM. Siano, inoltre, v la velocità del corpo in M e r la resistenza puntuale che si oppone al moto. Confrontando con il corollario al problema 2 si ha, ponendo P$=g$ e prendendo y come negativo e dx come costante [e ricordando che $v = \sqrt{h}$]:

[6](5)
$$\begin{aligned} &i) \quad gds^2 = 2hd^2y \\ &ii) \quad dh = gdy - rds \end{aligned}$$

da [6](5)(i) segue, differenziando

[6](5)
$$dh\left[= \frac{g}{2}\left(\frac{2dsd^2sd^2y - d^3yds^2}{(d^2y)^2}\right)\right] = gdy - \frac{gd^3yds^2}{2(d^2y)^2}$$

e, quindi, confrontando con [6](5)(ii):

[6](7)
$$r = g\frac{d^3yds}{2(d^2y)^2}$$

da cui, data la curva, si può determinare la resistenza.

COROLLARIO — *Da [6](5)(i) è triviale determinare l'altezza h*

[6](8)
$$h[= v^2] = \frac{gds^2}{2d^2y} = \frac{g\rho dx}{2ds}$$

A.[7]
Cfr. Newton (1687), pp. 261–3

Le entità geometriche involte nella prima dimostrazione di Newton possono essere rappresentate analiticamente nei termini seguenti [cfr. la figura 2].

Sia $y = y_x$ l'equazione della curva ACK e si pongano

$$OB = x_t, \quad BC = y_t, \quad BM = \xi_{t,\theta} = x'_t\theta\,.$$

Essendo

$$\Psi_x = y_{x'_t}x + y_{x_t} - y'_{x_t}x_t$$

l'equazione della retta tangente la curva in C, si avrà:

[7](1)
$$i)\quad HM = \Psi_{x_t+\xi_{t,\theta}} = y_{x_t} + y'_{x_t}x'_t\theta$$
$$ii)\quad hm = \Psi_{x_t-\xi_{t,\theta}} = y_{x_t} - y'_{x_t}x'_t\theta$$

e quindi

[7](2)
$$CH = hc = x'_t\theta\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}$$

Ponendo

[7](3)
$$i)\quad x_{t+\theta} - x_t = x'_t\theta + \frac{x''_t}{2!}\theta^2 + \&c. = \omega$$
$$ii)\quad x_t - x_{t-\theta} = x'_t\theta - \frac{x''_t}{2!}\theta^2 + \&c. = \epsilon$$

si avrà anche:

[7](4)
$$i)\ FG = \Psi_{x_t+\omega} - y_{x_t+\omega} = -\frac{y''_{x_t}\omega^2}{2!} - \frac{y'''_{x_t}\omega^3}{3!} - \&c.$$
$$= -\frac{y''_{x_t}}{2!}[x'_t]^2\theta^2 - \left[\frac{y''_{x_t}x'_tx''_t}{2!} + \frac{y'''_{x_t}[x'_t]^3}{3!}\right]\theta^3 - \&c.$$
$$ii)\ fg = \Psi_{x_t-\epsilon} - y_{x_t-\epsilon} = -\frac{y''_{x_t}\epsilon^2}{2!} + \frac{y'''_{x_t}\epsilon^3}{3!} - \&c.$$
$$= -\frac{y''_{x_t}}{2!}[x'_t]^2\theta^2 + \left[\frac{y''_{x_t}x'_tx''_t}{2!} + \frac{y'''_{x_t}[x'_t]^3}{3!}\right]\theta^3 - \&c.$$

e, inoltre:

[7](5)
$$i)\ HF = CH - CF = [x'_t\theta - \omega]\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2} =$$
$$= \left[-\frac{x''_t}{2!}\theta^2 - \frac{x'''_t}{3!}\theta^3 - \&c.\right]\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}$$
$$ii)\ fh = fC - hC = [\epsilon - x'_t\theta]\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2} =$$
$$= \left[-\frac{x''_t}{2!}\theta^2 + \frac{x'''_t}{3!}\theta^3 - \&c.\right]\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}$$

così come:

[7](6)
$$kl = \Psi_{x_t-\Omega} - y_{x_t-\omega} = -\frac{y''_{x_t}}{2!}\omega^2 + \frac{y'''_{xt}}{3!}\omega^3 - \&c.$$
$$= -\frac{y''_{xt}}{2!}[x'_t]^2\theta^2 - \left[\frac{y''_{x_t}x'_tx''_t}{2!} - \frac{y'''_{x_t}[x'_t]^3}{3!}\right]\theta^3 - \&c.$$

Da qui è facile valutare l'ordine al quale le identità di Newton possono considerarsi valide.

A.[8]
Cfr. Newton (1687), pp. 261 – 3

Assunta la (16), si ha, per la definizione stessa del movimento retrogrado [cfr. ancora la figura 2]:

[8](1)
$$i)\quad \frac{FH}{FG} \to \frac{r_t}{g}$$
$$ii)\quad \frac{fh}{fg} \to \frac{r_t}{g}$$

quindi:

[8](2)
$$\frac{FH}{FG}\frac{fg}{fh} \to 1$$

Ma, indicando con γ il modulo del vettore che esprime la gravità si ha anche:

[8](3)
$$i)\quad \frac{FG}{\gamma} \to 1\,;\ \frac{fg}{\gamma} \to 1$$

e, quindi,

$$ii)\quad \frac{FG}{\gamma}\frac{\gamma}{fg} = \frac{FG}{fg} \to 1$$

Sostituendo in [8](2) si trae, allora:

$$[8](4) \qquad \frac{FH}{FG}\frac{FG}{fg} = \frac{Fh}{fh} \to 1$$

È ora ovvio che:

$$[8](5) \qquad \frac{FC - CF}{fh + FH} = 1$$

e, quindi, sostituendo secondo la [8](4):

$$[8](6) \qquad \frac{fC - CF}{2FH} \to 1$$

Essendo $kl/FG \to 1$ si ha, inoltre,

$$[8](7) \qquad \frac{fC}{CF}\frac{\sqrt{kl}}{\sqrt{fg}} \to 1$$

e, quindi, sostituendo secondo [8](3)(ii), scomponendo e moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{FG} + \sqrt{kl}$,

$$[8](8) \qquad \frac{fC - Cf}{CF}\frac{kl + \sqrt{FGkl}}{FG - kl} \to 1$$

Ma essendo, anche:

$$[8](9) \qquad \frac{kl + \sqrt{FGkl}}{FG + kl} \to 1$$

la [8](8) diventa, per sostituzione:

$$[8](10) \qquad \frac{fC - CF}{CF}\frac{FG + kl}{FG - kl} \to 1$$

da cui, notando che

$$[8](11) \qquad \frac{FG + kl}{2FG} \to 1$$

si trae, sostituendo ancora:

$$[8](12) \qquad \frac{fC - CF}{CF}\frac{2FG}{FG - kl} \to 1$$

Sostituendo, ora, nella [8](1)(i), secondo la [8](6) e la [8](12) si trae successivamente:

$$[8](13) \qquad \begin{aligned} &i) \quad \frac{fC - CF}{2FG} \to \frac{r_t}{g} \\ &ii) \quad \frac{CF(FG - kl)}{4(FG)^2} \to \frac{r_t}{g} \end{aligned}$$

in accordo con l'erroneo risultato di Newton.

Si noti che, per quanto la deduzione sia, ovviamente, erronea, le ipotesi che intervengono in essa sono, separatamente prese, tutte corrette. Il linguaggio qui utilizzato, che mi pare sia il più adeguato a rappresentare l'effettivo ragionamento di Newton rende, tuttavia, assai difficile l'individuazione dell'errore.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

ALEMBERT (D'), J. B. LE R. (Diff.)
"Différentiel", *Enciclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Ie ed., Briasson, David l'Aîné, le Breton, Durand, Paris 1751 – 80 (35 voll.), vol. 4, 1754, pp. 985a–989b.

ALEMBERT (D'), J. B. LE R. (For.,)
"Force", *ivi*, vol. 7, 1762, pp. 110b–120a.

BERNOULLI, JOHANN (I) (1711)
"Extrait d'une lettre de M. Bernoulli [...] touchant la manière de trouver les forces centrales dans des milieux resistans en raison composée de leur densités et de puissances quelconques des vitesses du mobile", *Hist. Acad. Roy. Sci.* [de Paris], *Mem. Math. et Phy.*, 1711 (pub. 1714), pp. 47–53.

BERNOULLI, NICOLAS (1711)
"Addition de M. (Nicolas) Bernoulli, Neveu de l'Auteur de ce Mémoire – ci", *ivi*, pp. 53–56.

BORDA, J. C. (1769)
"Sur la courbe décrite par les boulets et les bombes en ayant égard à la résistance de l'air", *ivi*, 1769 (pub. 1772), pp. 247–71.

EULER, L. (1736)
Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, Tip. Acad. Scientiarum Petropoli, 1736 (2. voll.).

HEGEL, G. W. F. (1812)
Wissenchaft der Logik. Erster Band. Die obiective Logik, J. L. Sehrag Nürnberg 1812.

HEGEL, G. W. F. (1832)
System der obiective Logik. Erster Band. Die Lehre vom Seyn, J. C. Cotta, Stuttgard und Tübigen 1832 [trad. it. cit.: *Scienza della Logica*, vol. I, Laterza, Bari 1924 – 5 (trad. di A. Moni)].

HERMANN, J. (1716)
Phoronomia, Rod. et Gerh. Wetstenios, Amstelaedami 1716.

HUYGENS, C. (ŒUVR.)
Œuvres complètes de Christian Huygens (pub. par la Soc. Holl. des Sci.), Martines Nijhoff, La Haye 1888–1910 (12 voll.).

HUYGENS, C. (1690)
Traité de la lumière [...] avec un Discours de la cause de la pesanteur, P. Van der Aa, Leide 1690.

LACROIX, S. F. (1810–19)
Traité de calcul differentiel et du calcul intégral (IIe ed.), Courcier, Paris 1810 – 19 (3 voll.).

LAGRANGE, J. L. (1788)
Méchanique analitique, La veuve Desaint, Paris 1788.

LAGRANGE, J. L. (1797)
Théorie des fonctions analytiques, Impr. de la Rép., Paris 1797

LAGRANGE, J. L. (1801)
Leçons sur le calcul des fonctions, *Séances des écoles normales recuillies par des sténographes et revues par les professeurs*, nouv ed., Imp. du Cercle Sociale, Paris 1800–01 (10 tomi), t. X.

LAGRANGE, J. L. (1813)
Théorie des fonctions analytiques, Courcier, Paris 1813.

LAGRANGE, J. L. (1811–15)
Mécanique analytique, Curcier, Paris 1811 – 15 (2 voll.).

LEIBNIZ, G. W. (1689)
"Schediasma de Resistentia Medii et Motu Projectorum graviorum in medio resistente", *Acta Eruditorum*, 1689, pp. 38–47.

MONTUCLA, J. F. (1758)
Histoire des Mathématiques, C. A. Jombert, Paris 1758 (2 voll.).

MONTUCLA, J. F. (1799–1802)
Histoire des Mathématiques (Nouvelle edition considérablement augmentéé), H. Agasse, Paris 1799 – 1802 (4 voll.).

NEWTON, I. (1687)
Philosophiae naturalis principia mathematica, jussu Soc. Regiae ac typis J. Streater, Londini 1687.

NEWTON, I. (1704)
De Quadratura curvarum, in app. a: *Optiks [...] also two Treatise of the Species and Magnitude of Curvilinear Figure*, S. Smith and B. Walford, London 1704.

NEWTON, I. (1713)
Philosophiae naturalis principia mathematica, [senza editore], Catabrigiae 1713.

PRONY, (DE) G.R. (1799)
Mécanique philosophique ou analyse raisonée des diverses parties de la science de l'equilibre et du mouvement, Imp. de la Rep., Paris an. VIII [anche in *Journ. Ec. Poly.*, cah. VII – VIII].

PRONY, (DE) G.R. (1815)
Leçons de mécanique analytique données è l'école impériale [II vol.: *Royale*] *polytechnique*, Imp. de l'éc. Imper. [II vol.: Roy.] des ponts et chaussées, Paris 1810 – 15 (2 voll.).

ROBINS, B. (1739)
Remarks on Mr. Euler's Treatrise of "Motion" [...], J. Nourse, London 1739.

TREMBLEY, J. (1798)
"Observations sur une discussion relative à la Théorie de la résistance des milieux", *Mém. de l'Acad. Roy. Sci. et Bell. Lettr.* [de Berlin], 1798 (pub. 1801), Classe de Math., pp. 60–75.

VARIGNON, P. (1707)
"Des mouvements faites dans des milieux qui leur résistent en raisons quelconque", *Hist. Acad. Roy. Sci.* [de Paris], *Mem. Math. et Phy.*, 1707 (pub. 1711), pp. 382–476.

VARIGNON, P. (1709)
"Des mouvements primitivament variés dans des milieux resistens en raison des quarrés des vitesses effectives de ces mouvements", *Hist. Acad. Roy. Sci., Mem. Math. et Phy.*, 1709 (pub. 1711), pp. 193–227.

WALLIS, J. (1687)
"A Discourse concerning the Measure of the Air resistence to Bodies moved in it", *Phil. Trans.*, XVI, 1686–87, pp. 269–80.

WALLIS, J. (1693)
Opera Mathematica [...], vol. II: *De Algebra tractatus historicus et praticus [...]*, e theatro Sheldoniano, Oxoniae 1693.

WHITESIDE, T. D. (1967–81)
The Mathematical Papers of Isaac Newton, Cambridge U. P. Cambridge 1967–81 (8 voll.).

AUTHOR'S ADDRESS
Université de Genève
Einsegnement de Philosophie
20, Bd d'Yvoy (Pavillon des Isotopes)
1211 GENÈVE